Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 7 (1905)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: MÉTHODES EMPLOYÉES PAR LES CALCULATEURS EXTRAORDINAIRES POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES COMPLIQUÉS

Autor: BOBYNIN, V.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-8442

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

quelconque de la Terre, pour faire le voyage. Et j'aperçois plusieurs milliers d'intrépides délégués de la Société Astronomique mondiale, ne redoutant pas la fraîcheur de la température, réunis fraternellement sur la plate-forme de l'observatoire polaire, applaudissant à l'apparition des premiers rayons du Soleil, et devisant des choses terrestres, avec moins de tristesse que nous ne sommes obligés de le faire aujourd'hui.

En saluant dès à présent ces solennités scientifiques futures, je veux encore garder l'espoir qu'on n'y montrera pas trop d'ingratitude pour les ancêtres de l'époque barbare, et qu'on y conservera pieusement le souvenir de noms tels que ceux de Flammarion, de Janssen, de Poincaré. Ceux-là, dès aujourd'hui, ont droit, avec toute la légion des hommes de science et de travail qui préparent l'avenir, à la reconnaissance et à l'affection de leurs contemporains. En les acclamant avec moi, vous acclamerez à la fois la science et l'humanité présentes, dont ils sont la gloire, et l'humanité future plus éclairée, dont ils auront été les précurseurs.

MÉTHODES EMPLOYÉES PAR LES CALCULATEURS EXTRAORDINAIRES

POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES COMPLIQUÉS

Le nombre peut être considéré ou bien dans son rapport avec d'autres nombres, ou bien en lui-même, comme étant entièrement indépendant des autres nombres, et appartenant à une suite indéfinie de nombres entiers et fractionnaires, disposés dans l'ordre de leurs grandeurs relatives.

Cette suite peut être nommée « indéfinie », parce qu'elle est infinie, non seulement dans son prolongement, mais aussi dans chaque intervalle compris entre deux nombres quelconques. On peut dire de même que, dans le second cas, le nom-

bre est envisagé dans son être individuel, tandis que dans le premier cas, il peut être envisagé dans sa connexion avec d'autres nombres.

Conformément à ces deux manières d'envisager le nombre, il existe deux méthodes pour le déterminer. Le nombre peut être trouvé, ou bien comme résultat de son expression en d'autres nombres donnés suivant les caractères qui le lient avec ceux-ci, ou bien comme un membre d'une suite indéfinie, selon le caractère qui le distingue de tous les autres nombres.

D'après ce qui précède, on voit que la seconde méthode peut être appelée *méthode de distinction*, et la première *méthode d'expression du nombre en d'autres nombres*.

En déterminant le nombre d'après la méthode de distinction, l'homme procède de la même façon qu'en cherchant un objet parmi d'autres, se laissant guider par le caractère essentiel de cet objet. Le problème de détermination d'un nombre se rapproche ainsi d'une énigme.

Donc, en employant la méthode de distinction, la première chose qui dans la pratique se présente à notre esprit c'est l'essai.

Guidés d'un côté par les traits caractéristiques du nombre cherché et de l'autre par notre connaissance de quelques-uns des nombres nous *essayons* de le trouver parmi les nombres connus, nous servant pour cela de la comparaison des traits distinctifs de ceux d'entre eux que nous choisissons avec les traits identiques du nombre cherché.

Autrement dit, nous contrôlons les essais par les conditions du problème.

Cette forme de la méthode de distinction se nomme *méthode d'essai;* et c'est la seule qui, jusqu'à présent, a été employée. Oubliée par la science, cette méthode est très répandue parmi ceux qui n'ont pas reçu d'instruction, comme le prouvent les observations faites sur les calculateurs extraordinaires, tels que Inaudi, Iwan Petroff.

Elle était plus en faveur encore dans l'antiquité, où non seulement la science l'adoptait, mais encore la faisait concourir à son développement.

Par l'étude de sa nature et de ses propriétés, elle devient très importante pour la méthodologie mathématique et surtout pour son histoire.

Les matériaux principaux, et presque uniques dont nous disposions encore pour cette étude, ce sont les problèmes posés aux calculateurs extraordinaires.

Parmi les problèmes posés à Iwan Petroff par le Prof. Pérévostchikoff sur l'équation du 2° degré, on trouve le suivant :

« *On a acheté quelques pouds de sucre pour 460 roubles ;* « *si pour la même somme, on eût acheté 3 pouds de plus,* « *chaque poud aurait coûté 3 roubles de moins ; combien de* « *sucre a-t-on acheté ?*

Le Prof. Pérévostchikoff remarque ce qui suit à propos de la manière dont Iwan Petroff a résolu ce problème :

« Au premier moment cette question parut troubler l'enfant ; il se balança d'abord sur ses hanches, tourna la tête à plusieurs reprises, puis resta immobile et s'écria tout d'un coup : « Vingt pouds ! » Tout ce manège dura dix-sept minutes. »

« Frappé de l'exactitude de ce résultat exigeant la résolution d'une équation de second degré, je demandai à l'enfant quel procédé il avait suivi pour résoudre le problème. Quoique le petit répondit assez niaisement, je pus comprendre qu'il avait trouvé le chiffre exact *en examinant bien des nombres qui auraient pu satisfaire aux conditions du problème.* Ainsi notre calculateur, outre l'esprit de combinaison qu'il possède, est encore doué d'une mémoire surprenante qui lui permet de connaître un grand nombre de chiffres. »

D'après ces indications du procès-verbal, la marche qu'a suivie Petroff pour résoudre ce problème, selon la méthode d'essai, a pu être la suivante : Les conditions du problème, nous montrent tout de suite que le prix d'un poud de sucre ne peut être inférieur à 3 roubles. Ne sera-t-il pas de 4 roubles ?

Vérifions cette supposition par les conditions du problème. En admettant l'hypothèse de 4 roubles nous voyons que la quantité de sucre achetée se monte à 115 pouds. Si pour la

même somme on avait acheté 3 pouds de plus (118 pouds), le prix d'un poud aurait diminué de moins d'un rouble ($^{6}/_{59}$ rouble). Donc, notre essai n'est pas juste.

Pour les essais subséquents, avec des nombres supérieurs à 4, il faudra choisir ceux qui présenteront le moins de difficultés pour les vérifications suivantes:

Ce sont dans le cas présent, les diviseurs entiers du nombre 460, c'est-à-dire 5, 10, 20, 23, etc.

Si ces nombres n'aboutissent pas à trouver l'inconnu cherché, ils nous indiqueront en tous cas des limites plus étroites pour les essais suivants. La vérification des essais faits avec les nombres 5, 10 et 20 nous montre qu'ils restent également sans succès. En revanche, l'essai tenté avec le nombre 23 nous amène directement au nombre cherché — 20 pouds — car la diminution correspondante du prix d'un poud est exactement de 3 roubles. La solution du problème est donc trouvée après cinq essais. Remarquons que le nombre des essais peut être moindre encore et réduit à trois.

En effet, la diminution insignifiante du prix d'un poud de sucre, au premier essai (avec le nombre 4) nous fait voir que des essais tentés avec le nombre 10, et à plus forte raison avec 5, ne pourront nous amener à la diminution de prix relativement forte de 3 roubles par poud, indiqué par le problème.

De tous les problèmes résolus par Iwan Petroff, au point de vue de l'intérêt qu'ils présentent sur la méthode des essais, la seconde place appartient au problème suivant, qui lui fut proposé par le Conseil du Gymnase de Kostroma, et qui rentre dans la catégorie des problèmes se résolvant par les théories des équations indéterminées :

« *Combien y aura-t-il de différents moyens de payer 78 roubles, avec deux genres de pièces : de 3 et de 5 roubles ?* »

Le procès verbal concernant ce problème nous apprend qu'Iwan Petroff le résolut par tous les 6 moyens. La condition du problème nous amène à essayer si nous pouvons payer la somme au moyen d'un seul genre de monnaie.

La vérification par les conditions du problème de l'essai de payer en se servant seulement de pièces de 3 roubles, soit la division du nombre 78 par 3, nous donne raison et

nous amène en même temps à l'un des moyens de résoudre le problème.

La même vérification appliquée à la pièce de 5 roubles nous fournit un second moyen de résoudre le problème, et en même temps nous prouve l'insuccès de l'essai concernant notre tâche directe. Il s'ensuit que le nouveau moyen a un caractère mixte, c'est-à-dire qu'il opère le paiement avec les deux genres de monnaie, 15 pièces de 5 roubles et 1 pièce de 3 roubles.

Après les deux premiers succès, immédiat dans le premier cas, et médiat dans le second, d'autres essais sont inutiles, attendu que les autres moyens de paiement s'obtiennent en remplaçant simplement, dans une des solutions déjà connues, un groupe de pièces par un autre groupe de valeur équivalente. Dans la première solution, soit 26 pièces de 3 roubles, on pourra faire 5 substitutions, en remplaçant 5, 10, 15, 20 et 25 pièces de 3 roubles par 3, 6, 9, 12 et 15 pièces de 5 roubles. En somme on obtient six solutions différentes, car la solution trouvée au moyen de la dernière substitution est identique à celle que nous a donnée le second essai. — Nous trouverons les mêmes solutions en faisant les substitutions correspondantes dans la solution trouvée au second essai, c'est-à-dire si nous remplaçons 3, 6, 9 et 12 pièces de 5 roubles consécutivement par 5, 10, 15 et 20 pièces de 3 roubles.

Le problème suivant, par son intérêt et par le caractère typique de sa solution, se distingue entre tous les problèmes purement arithmétiques : *De deux espèces de thé dont l'un coûte 7 roubles 50 kopecks la livre et l'autre 11 roubles, il faut faire un mélange et savoir combien l'on doit prendre de chaque sorte pour obtenir 50 livres et le vendre à 9 roubles ?*

Ce problème appartient à un genre de problèmes très connus sur la règle d'alliage de seconde espèce. D'après les mots du procès-verbal du Prof. Pérévostchikoff « Iwan Pétroff l'a résolu en 8 minutes : 22 ℔ de thé à 11 rb. et 28 ℔ de thé à 7 rb. 50 kop. L'inexactitude que présente cette solution est insignifiante Les vrais chiffres devraient être 21 $^{15}/_{35}$ et 28 $^{20}/_{35}$. »

La condition sous-entendue de ce problème exigeant que dans la vente du thé (à 9 rb. il n'y ait ni gain ni perte), exclut la possibilité de l'essai consistant à mélanger les deux qualités de thé en proportion égale ; elle indique clairement que pour ce mélange il faut prendre plus de thé bon marché que de thé cher. Les essais doivent donc commencer par la supposition que le mélange se compose de 26 ℔ de thé bon marché et 24 ℔ de thé cher. La vérification nous prouve que cet essai est faux, vu qu'il entraîne une perte de 9 rb. L'essai suivant avec 25 ℔ et 23, n'aboutit non plus à rien, car il ferait subir une perte de 5 rb. 50 kop. L'essai avec 28 et 22 ℔ donne de meilleurs résultats ; ici la perte n'est que de 2 roubles. Cet essai fut le dernier tenté par Iwan Petroff. Il s'en est tenu là, peut-être involontairement, à la suite d'une faute, peut-être intentionnellement, voulant éviter d'autres essais qui auraient pu tirer en longueur. La tentation qu'il eut d'agir ainsi fut d'autant plus grande que l'examinateur et les personnes présentes, ne comprenant pas le fond de la chose et trouvant insignifiante l'inexactitude de la solution, se déclarèrent entièrement satisfaits. Qu'aurait dû faire Iwan Petroff pour obtenir une solution rigoureusement exacte.

Puisque pour les essais subséquents, on aura affaire à des fractions, il est utile de remarquer qu'en les choisissant, il est indispensable d'observer le même *principe de préférence des nombres les plus favorables pour les calculs*, qu'on applique, comme nous l'avons vu, dans les cas d'essais faits avec des nombres entiers.

Si les fractions les plus approchantes ne sont pas en état de nous donner la solution cherchée, en tout cas elles nous conduirons au rapprochement des limites. Il faut donc commencer les nouveaux essais avec les fractions les plus simples, avec des fractions qui aient pour numérateur l'unité. Le premier essai, dans ce nouveau domaine, consistera donc dans la supposition que le mélange contient 28 ½ ℔ de thé bon marché et 21 ½ ℔ de thé cher. La vérification nous montre que l'essai aboutit à une perte de 25 kopecks. Il est donc sans succès. La quantité de 28 ℔ de thé bon marché doit être augmentée de plus d'une demi-livre. Les augmentations

en plus d'une demi-livre, pour les essais suivants, de $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_7$, $^1/_8$, $^1/_9$, $^1/_{10}$, $1/_{11}$, $^1/_{12}$, $^1/_{13}$ donnent des gains conformes de 91 $^2/_3$ kopecks, 62 $^1/_2$, 45, 33 $^1/_3$, 25, 18 $^3/_4$, 13 $^8/_9$, 10, 6 $^9/_{11}$, 4 $^1/_6$, 1 $^{12}/_{13}$. Seul, l'essai d'augmenter la demi-livre de $^1/_{14}$, ou, ce qui revient au même, la composition du mélange de 28 ℞ $^4/_7$ de thé bon marché et de 21 ℞ $^3/_7$ de thé cher nous amène à une solution exacte. Il est clair que le nombre des essais examinés dans le domaine des fractions peut être considérablement diminué ; puisqu'on obtient un gain trop fort en augmentant la demi-livre d'un tiers, on peut passer immédiatement à l'augmentation de $^1/_7$, par exemple, ou même de $^1/_{10}$ ou $^1/_{12}$.

On peut du reste réaliser une économie de temps et de travail, si tout de suite après le premier essai dans le domaine des nombres entiers, on remplace tous les essais suivants dans les deux domaines par *une composition progressive des nombres inconnus et cherchés selon les conditions du problème.* C'est pour cette raison que, comme dans le problème précédent, il faut seulement remplacer consécutivement les parties de la grandeur approximative de celui des inconnus qui doit être diminué, par des parties égales, dans un certain sens, de grandeur approximative, de l'autre inconnu, c'est-à-dire celui qui doit être augmenté. Dans le cas actuel, la raison d'un pareil remplacement est la diminution de la perte de 3, 5 roubles en remplaçant une livre de thé cher par une livre de thé bon marché. Il en résulte que la perte de 9 roubles obtenue au premier essai diminuera de 8 rb. 75 kop. en remplaçant 2 $^1/_2$ ℞ de thé cher par la même quantité de thé bon marché. Ainsi le mélange de 21 $^1/_2$ ℞ de thé cher donne une perte de 25 kopecks seulement. Remarquons ensuite que 25 kopecks sont le $^1/_{14}$ de 3,5 roubles ; on trouve que le supplément au remplacement précédent, qui nous donne le remplacement de $^1/_{14}$ de thé cher par la même quantité de thé bon marché n'entraîne ni gain ni perte. Le résultat de ces deux remplacements n'est autre chose que la réponse exacte du problème, déjà trouvée.

Des nombreux problèmes résolus par Inaudi, considérons-en deux qui lui furent proposés par l'Académie des Scien-

ces, à Paris, le 8 février 1892 : « *Quel est le nombre dont le cube additionné à son carré donne 3600?* » — Cette équation cubique pouvait être résolue par Inaudi de la manière suivante : Les conditions du problème montrent que l'inconnue cherchée doit être plus petite que la racine cubique du nombre 3600. La détermination de cette racine peut donc servir de point de départ aux essais, ou de limite supérieure, dans le cas présent. Attendu que les extractions des racines, même des degrès supérieurs, ne donnaient aucune difficulté au calculateur, il dut trouver aisément que la racine cubique du nombre 3600 est comprise entre les nombres 15 et 16. Au premier essai, on pouvait supposer que l'inconnue cherchée était 15. La vérification de cette supposition, c'est-à-dire la détermination de la somme du cube et du carré de 15 — confirmant entièrement la supposition — montre que la solution obtenue par le premier essai est parfaitement juste. De sorte que, grâce à sa mémoire numérique prodigieuse Inaudi donna une réponse instantanée, au grand étonnement des pesonnes présentes, qui ne comprenaient pas ce dont il s'agissait. Quelqu'un même qui se fût intéressé au succès d'Inaudi n'eût pu trouver de problème plus facile à résoudre, et plus sensationnel en même temps. La solution de ce problème, vu l'extraction du cube carré qui s'y fait, nous oblige à nous arrêter à la question des procédés employés par les calculateurs extraordinaires pour les *extractions des racines*. Quoique n'ayant aucune difficulté à trouver la solution des problèmes portant sur des racines à indices les plus divers, Inaudi ne put donner que des réponses très évasives et incomplètes sur la manière dont il s'y prenait pour les résoudre. D'après ce qu'il dit, on voit que pour les extractions des racines, il n'avait aucune méthode précise et ne faisait aucun calcul régulier. En faisant avec une rapidité extraordinaire l'élévation des nombres qu'il se représentait au degré correspondant, il arrivait enfin à découvrir parmi ceux-ci la racine cherchée. En vertu de ce qui vient d'être dit, il est certain qu'Inaudi se servait, pour l'extraction des racines, de la méthode des essais. L'adaptation de cette méthode au cas présent devait certainement commencer par la détermination des

limites entre lesquelles doivent rentrer les essais à accomplir. Le système de calcul décimal fournit, pour cette détermination, des indications primordiales très précieuses. Prenons comme exemple le nombre 1.048.576 et tirons-en à l'aide de la méthode des essais, la racine au 5me degré. L'élévation à ce degré des nombres 10 et 20 donne respectivement 100.000 et 3.200.000. Vu que le nombre donné se trouve entre ces puissances, elles constituent les limites qui contiendront entre elles les essais suivants. Si le nombre donné se trouvait près d'une de ces limites, cette dernière serait la limite supérieure ou inférieure par laquelle devraient commencer les essais. Mais dans le cas présent, le nombre donné se trouve loin de l'une et l'autre puissances trouvées. C'est pourquoi les essais devront commencer par un nombre intermédiaire qui se trouve entre leurs racines au 5me degré, c'est-à-dire par le nombre 15. La vérification de cet essai nous montre que l'élévation réelle du nombre 15 au 5me degré est sans succès, vu qu'elle nous donne le nombre 759.375. Malgré son insuccès, cet essai est néanmoins utile, car il rapproche les limites des essais suivants. En vérité, il donne un nombre qui remplace la limite inférieure par une autre limite plus proche du nombre donné. Les essais suivants doivent donc être commencés, en vertu du principe des nombres approchants, par le nombre entier le plus voisin de 15, c'est-à-dire 16. La vérification de l'essai consistant dans l'admission de ce dernier nombre comme la racine cherchée, confirme entièrement cette supposition et donne, dans le cas considéré, l'expression parfaitement juste de la raison cherchée.

Le second problème proposé à Inaudi par l'Académie des sciences est le suivant : *Trouvez un nombre composé de 4 chiffres, dont la somme égale 25, sachant que la somme des chiffres représentant les centaines et les milliers est égale au chiffre des dizaines et que la somme des chiffres des dizaines et des milliers égale le chiffre des unités, en outre que les chiffres lus dans l'ordre inverse de l'écriture donnent un nombre plus grand que 8082.*

En employant la méthode ordinaire, ce problème se réduit

à un système de quatre équations à 4 inconnues. Voyons comment il sera résolu par la méthode des essais. Le plus proche des nombres qui satisfasse à la première condition du problème sera évidemment un nombre de 4 chiffres, représenté par trois nombres 6 et un nombre 7. Pour décider la place que peut occuper ce dernier nombre, il suffit de se référer à la seconde condition du problème, qui montre que le chiffre des dizaines doit, en général, dépasser chacun des chiffres des milliers et des centaines, pris à part. Donc le nombre qui satisfera entièrement à la première condition, et partiellement seulement à la seconde, sera 6676. On peut accepter ce nombre comme point de départ pour les essais suivants, ou bien — ce qui dans le cas présent est plus facile — pour la formation graduelle de l'inconnue cherchée, selon les conditions du problème. Les moyens d'arriver à cette formation sont les changements faits, selon les conditions, dans le nombre choisi qui nous sert comme point de départ dans le premier essai. Pour s'approcher encore davantage du nombre à composer et remplir la seconde condition, les chiffres des milliers et des centaines ne doivent pas faire ensemble plus de 9; et pour atteindre définitivement pleine satisfaction, il faut que le chiffre des dizaines lui-même égale 9. Diminuant en vertu de ces considérations 12, soit la somme des chiffres des milliers et des centaines, de 3, et prenant à ce dernier chiffre 2 unités pour les ajouter au chiffre des dizaines, ou 7 et 1 au chiffre des unités, ou 6 on trouve l'un des deux nombres 4597 ou 5497, qui satisfont aux deux premières conditions. La troisième condition, de même que la seconde, exige du nombre cherché que la somme des chiffres de ses milliers et dizaines soit inférieure à 10 et égale au chiffre des unités. La première de ces exigences exclut de tout examen le second des nombres composés tout à l'heure, comme ayant une somme plus grande de chiffres des milliers et des dizaines. Quant au premier de ces nombres, après avoir diminué de 4 les chiffres des milliers et des dizaines, il faut distribuer ce 4 entre les chiffres des centaines et des unités, de manière à satisfaire entièrement à la troisième condition sans manquer à la seconde. Pour cela, il faut dimi-

nuer de 3 le chiffre des milliers, et le chiffre des dizaines de 1, et augmenter de 2 les centaines et les unités. Ces changements faits, nous obtenons le nombre 1789, qui remplit entièrement les 3 premières conditions. La vérification de ce dernier nombre par la quatrième condition du problème, soit la soustraction du nombre 1789 du nombre obtenu en inversant l'ordre des chiffres, 9871, confirme la justesse de cet essai et achève la solution du problème par la méthode des essais. La durée de cette solution peut être beaucoup plus abrégée si l'on prend de suite en considération plusieurs conditions, et même les 3 premières ensemble. Inaudi possédant une mémoire numérique si étonnante, et le talent qu'on lui prête de saisir avec une vitesse extraordinaire les relations existant entre les données du problème, on peut même s'étonner qu'il n'ait pas trouvé instantanément la solution du problème et qu'il y ait mis deux à trois minutes. Cet étonnement est parfaitement justifiable, en vertu de la soumission des conditions du problème aux lois du système hindou de calcul écrit, soumission qui, dans la méthode des essais, est tout à fait indispensable et rend la quatrième condition absolument superflue. L'exactitude de cette remarque peut être facilement prouvée, soit par la méthode des essais, soit par les méthodes ordinaires employées dans la science. En effet, l'examen du nombre 1789 par la première méthode montre qu'il n'existe aucun autre nombre qui soit en état de satisfaire à la fois aux 3 premières conditions du problème. De même, en employant les méthodes ordinaires, en laissant de côté la quatrième condition, et en ajoutant du système des 3 équations indéterminées à 4 inconnues.

$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 25 \\ x + y \qquad\quad &= z \\ x + z \qquad\quad &= u \end{aligned}$$

que nous obtenons des 3 premières conditions du problème les inégalités $x < 10$, $y < 10$, $z < 10$, $u < 10$, qui expriment les lois du système de calcul écrit hindou, toutes les solutions du système indéterminées seront éliminées, sauf une — le nombre 1789.

La description des solutions de divers problèmes à l'aide de la méthode d'essai nous permet de nous représenter cette méthode dans son aspect général. Comme nous le montre son nom même, elle consiste en une suite d'essais à l'aide desquels on tâche de parvenir à une solution aussi exacte que possible. Vu que, pour avoir du succès, il faut réduire autant que possible le nombre des essais, il est indispensable, avant de la commencer, de déterminer leurs limites, *inférieure* et *supérieure*, ou les deux ensemble selon les conditions du problème.

Pour le premier essai qui sert de point de départ aux autres, il faut prendre une de ces limites, ou bien un nombre qui s'en rapproche plus ou moins. En cas d'insuccès du premier essai, le choix des nombres pour le second se fait selon le principe des nombres favorables (principalement pour les calculs). Parvient-on, par ces essais, à la solution du problème ? ou bien, dans le cas contraire, jusqu'à quel point parvient-on à le résoudre ? C'est à l'aide de la *vérification du problème* que se résout cette question. Cette vérification s'impose si impérieusement par la nature même de la méthode, qu'il est indispensable d'en parler, non seulement comme du moyen unique et naturel provenant des conditions de la méthode pour l'estimation des essais ; elle représente un élément de la méthode si essentiel et si indispensable que sans cette estimation son emploi est absolument inadmissible. Le trait caractéristique de la méthode des essais, qui la distingue, d'une manière décisive des autres méthodes dans le même domaine, c'est son *caractère de généralité ;* vu qu'elle s'applique aux solutions des questions théoriques et pratiques et des problèmes les plus divers. Grâce à cette qualité importante, due à sa primitivité, elle est absolument exempte de tout ce qui est artificiel dans son origine, dérivée de la nature psychique de l'homme sans aucune participation de la conscience ni du cours des idées spécialisées qui surgissent en elle. Mais il faut remarquer que c'est seulement théoriquement que l'on parle de la généralité de la méthode des essais. En pratique, le succès de l'application est souvent très douteux et souvent très inaccessibles. Les questions compliquées contenant

beaucoup de conditions ou exigeant la détermination de beaucoup d'inconnues, de même que la recherche des solutions exactes dans un grand nombre de cas, exigent généralement un nombre très grand, et même indéterminé d'essais. On peut arriver à un essai heureux dans une quantité de pareilles questions soit par hasard, soit à l'aide d'une persévérante poursuite du but prolongée plus ou moins longtemps. — Enfin il n'est pas difficile de se représenter des cas où ni le hasard, ni une certaine persévérance n'aboutissent à rien. Un autre trait de la méthode des essais, c'est *l'incapacité de ses procédés de s'élever au-dessus du seuil de la conscience,* autrement dit leur *inconscience,* qui s'est manifestée aussi clairement dans l'antiquité que chez les gens des temps plus modernes se trouvant sur la même échelle de développement intellectuel.

Si dans la science parvenue à un état plus développé, l'emploi de la méthode des essais n'avait pas été exclus, certes, son inconscience l'aurait vu disparaître d'elle-même. La méthode d'essai peut être *directe,* quand les essais tendent à la détermination du nombre cherché, et *indirecte,* quand ils veulent déterminer un nombre qui se trouve dans des rapports connus avec le nombre cherché, selon les conditions du problème. Ce dernier, dans ce cas, se cherche indirectement à l'aide de son lien avec le nombre trouvé.

Un cas de méthode particulier des essais, soit sa forme particulière, c'est la méthode des formations graduelles, ou la composition de l'inconnu cherché selon les conditions de la question. Dans cette méthode, tous les essais, ou une partie des essais, excepté le premier nombre, se remplacent par une suite de changements apportés à un nombre qui sert de point de départ, ou bien, en général, par le dernier essai. Le rapprochement graduel de ce nombre de la solution cherchée et exacte de la question est le seul but de ces remplacements, et c'est par ce but seul qu'il faut se laisser guider en les effectuant. L'adaptation de cette méthode étant loin d'être admise dans toutes les questions qui peuvent être résolues à l'aide de la méthode des essais, on ne peut y voir qu'un cas particulier de cette dernière, comme on l'a déjà

fait remarquer plus haut. Mais ce cas particulier représente des avantages considérables et se trouve à un degré de développement plus haut que la méthode générale. Nous avons déjà vu que son introduction diminue considérablement la durée de la solution du problème. Mais ce n'est pas tout ; il apporte dans le procédé de la recherche de l'inconnu d'après la méthode des essais une plus grande précision, et dans quelques cas, comme par exemple dans le problème envisagé plus haut, dans la règle d'alliages, il rend ces procédés absolument précis. Enfin, exigeant une compréhension fondamentale du problème, et, en général une certaine maturité d'esprit, il constitue la plus haute expression de la méthode des essais, dont la possession et l'usage conscients ne peuvent être accessibles à l'homme avant qu'il soit parvenu à un degré assez élevé de développement intellectuel. Grâce à ces qualités, beaucoup de questions deviennent parfaitement accessibles à la méthode des essais ; le succès de leur solution représente, d'après ce qui a été dit, des difficultés considérables, souvent insurmontables, ou bien il est dû qelquefois, au hasard.

V. Bobynin (Moscou).

(Traduit par V. Fréedericksz, Genève).

SUR QUELQUES POINTS ÉLÉMENTAIRES
DU CALCUL INTÉGRAL

Dans les lignes suivantes je me permets de communiquer deux remarques qui m'ont été utiles dans mon Cours universitaire sur le Calcul intégral ; la première se rapporte à la démonstration de l'existence de l'intégrale définie d'une fonction d'une seule variable réelle, l'autre à la notion de l'intégrale curviligne d'une différentielle exacte et à la démonstration des théorèmes fondamentaux, relatifs à ces intégrales,