Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 7 (1905)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES POINTS ÉLÉMENTAIRES DU CALCUL INTÉGRAL
Autor: Schlesinger, L.
Kapitel: I
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-8443

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

desquels découlent les théorèmes de CAUCHY sur les intégrales des fonctions monogènes d'une variable complexe.

I

Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle x, uniforme et finie dans l'intervalle.

$$p < x < q \ .$$

Pour démontrer l'existence de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx \ , \tag{1}$$

a, b étant deux valeurs situées entre p et q, il faut démontrer, selon RIEMANN [1], que la somme

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, f(\xi_{k-1}) \tag{2}$$

tend vers une limite déterminée, si l'on augmente le nombre n-1 des points $x_1, \ldots, x_{n-1}$, partageant l'intervalle $a \ldots b$ ($a = x_0$, $b = x_n$) en n parties, de manière que l'étendue de chacune des parties devienne aussi petite que l'on veut, et que cette limite soit indépendante du choix des points $x_1, \ldots, x_{n-1}$ et des points intermédiaires ξ_{k-1} ,

$$x_{k-1} \leqq \xi_{k-1} < x_k \ .$$

Si l'on forme la somme (2) pour les mêmes points $x_1, \ldots, x_{n-1}$, mais, pour deux séries différentes de valeurs intermédiaires ξ_{k-1} et $\bar{\xi}_{k-1}$:

$$S_1 = \sum_k (x_k - x_{k-1})\, f(\xi_{k-1}) \ ,$$

$$S_2 = \sum_k (x_k - x_{k-1})\, f(\bar{\xi}_{k-1}) \ ,$$

[1] *Werke*, (1892), p. 239.

la condition nécessaire et suffisante pour que la différence $S_1 - S_2$ devienne aussi petite que l'on veut en augmentant le nombre n de la dite manière, consiste — comme on sait — en ce que

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, \sigma_{k-1} = 0 , \tag{3}$$

en désignant par σ_{k-1} l'*oscillation* de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $x_{k-1} \ldots x_k$, c'est-à-dire, la différence entre les valeurs extrêmes, dont la fonction $f(x)$ est capable dans cet intervalle. Quant à la démonstration que cette condition est suffisante pour que les sommes (2), formées avec des séries différentes de points de partition $x_1, \ldots, x_{n-1}$, tendent vers une limite commune, elle se fait ordinairement en appliquant le principe de la superposition des partitions, due à CAUCHY[1]. Je vais montrer, en m'appuyant à une remarque due à KRONECKER[2] que l'application du principe mentionné devient superflu, si l'on étend de la manière suivante le sens de la condition (3).

Soient $\zeta_{k-1} \ldots \zeta_k$ des intervalles embrassant les intervalles $x_{k-1} \ldots x_k$, mais tels que $\zeta_k - \zeta_{k-1}$ tende vers zéro en même temps que $x_k - x_{k-1}$; ces intervalles plus grands pourront d'ailleurs pénétrer l'un dans l'autre. En désignant alors par σ_{k-1} l'oscillation de $f(x)$ dans l'intervalle $\zeta_{k-1} \ldots \zeta_k$ et par ξ_{k-1}, $\overline{\xi}_{k-1}$ deux valeurs intermédiaires du même intervalle, la condition (3) continuera d'être nécessaire et suffisante pour que les sommes S_1, S_2 se rapprochent indéfiniment.

Augmentons maintenant le nombre n des parties $x_{k-1} \ldots x_k$ selon une loi arbitraire, de manière que ces parties tendent vers zéro, et soient

$$S_{n_1}, \; S_{n_2}, \; \ldots$$

les sommes (2), formées pour les partitions successives avec des valeurs intermédiaires quelconques; il faut démontrer

---

[1] *Résumé des leçons*, etc. (1823), p. 81.

[2] *Vorlesungen über Integrale* (1894), p. 6-7.

qu'étant δ une petite quantité positive donnée à l'avance, on puisse déterminer le nombre N de manière que l'on ait

$$| S_{n_{\lambda+\nu}} - S_{n_\nu} | < \delta$$

pour $\nu > N$ et λ arbitraire, c'est-à-dire que $\lim_\nu S_{n_\nu}$ existe. Puis il faut démontrer que cette limite soit indépendante de la manière, dont le nombre n a été augmenté. Soient donc $x_1, \ldots, x_{n-1}$, avec les valeurs intermédiaires $\xi_0, \ldots \xi_{n-1}$, et $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{m-1}$, avec les valeurs intermédiaires $\bar{\xi}_0, \ldots, \bar{\xi}_{m-1}$, deux partitions, et

$$S = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_{k-1}) ,$$

$$T = \sum_{k=1}^{m} (\mathfrak{x}_k - \mathfrak{x}_{k-1}) f(\bar{\xi}_{k-1})$$

les sommes correspondantes, il suffira d'établir que la différence T-S tende vers zéro, si l'on fait croître n et m de manière que les différences $x_k - x_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ et $\mathfrak{x}_k - \mathfrak{x}_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ deviennent infiniment petites. A cet effet, désignons par $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_{n+m-2}$ les valeurs x_k et $\mathfrak{x}_k$, rangées par ordre croissant, et soit l'intervalle $\mathfrak{X}_{\lambda-1} \ldots \mathfrak{X}_\lambda$ contenu dans l'intervalle $x_{\lambda_i-1} \ldots x_{\lambda_i}$ et dans l'intervalle $\mathfrak{x}_{\lambda_k-1} \ldots \mathfrak{x}_{\lambda_k}$; alors il est évident que nous aurons :

$$S = \sum_{\lambda=1}^{m+n-1} (\mathfrak{X}_\lambda - \mathfrak{X}_{\lambda-1}) f(\xi_{\lambda_i-1}) ,$$

$$T = \sum_{\lambda=1}^{m+n-1} (\mathfrak{X}_\lambda - \mathfrak{X}_{\lambda-1}) f(\bar{\xi}_{\lambda_k-1}) .$$

Mais écrites de telle manière, les sommes S et T rentrent sous la forme des sommes S_1, S_2 prises dans le sens étendu, parce qu'en réunissant les intervalles $x_{\lambda_i-1} \ldots x_{\lambda_i}$ et $\mathfrak{x}_{\lambda_k-1} \ldots \mathfrak{x}_{\lambda_k}$, on obtient un intervalle $\zeta_{\lambda-1} \ldots \zeta_\lambda$ qui contient les points ξ_{λ_i-1}

et $\bar{\xi}_{\lambda_{\overline{k}-1}}$, embrasse à la fois l'intervalle $\mathfrak{x}_{\lambda-1} \ldots \mathfrak{x}_\lambda$ et devient infiniment petit en même temps que $\mathfrak{x}_{\lambda-1} \ldots \mathfrak{x}_\lambda$. La condition (3) est donc suffisante pour que S et T tendent vers une limite commune, *c. q. f. d.*

Il est évident que cette condition se trouve satisfaite, — aussi dans le sens étendu, — si $f(x)$ est une fonction continue, au sens de CAUCHY, dans l'intervalle $p \ldots q$.

II

Soient $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ deux fonctions des variables réelles ξ, η qui, à l'intérieur d'un domaine S simplement connexe du plan des (ξ, η), sont uniformes et finis et admettent des dérivées partielles par rapport à ξ et η. Si la condition d'intégrabilité.

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial Q}{\partial \xi} \tag{1}$$

se trouve satisfaite à l'intérieur de S, l'équation différentielle

$$du = P d\xi + Q d\eta \tag{2}$$

possède une solution u qui est une fonction des deux variables indépendantes ξ, η uniforme à l'intérieur de S, et qui s'évanouit pour un point (ξ_0, η_0) de S, donné arbitrairement. C'est ce que nous allons démontrer, sans faire usage des notions de l'intégrale curviligne et de l'intégrale double ; au contraire, notre démonstration nous va permettre de démontrer d'une manière extrêmement simple les théorèmes classiques, relatifs aux intégrales curvilignes. Nous allons procéder suivant EULER [1].

1. Soient (ξ_0, η_0) et (ξ, η) deux points de S, tels que le rectangle déterminé par les points (ξ_0, η_0), (ξ, η_0), (ξ, η), (ξ_0, η) — qui seront désignés aussi par A, B, C, D — se trouve entièrement à l'intérieur de S. Nous considérons les deux expressions

[1] Voir *Institutiones calculi integralis*, t. I, caput II, art. 448 et suiv.