Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 7 (1905)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UNE MANIÈRE D'EXPOSER LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE
Autor: Richard, J.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-8444

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

fermée se réduit à zéro [1]. Le passage aux théorèmes de CAUCHY, relatifs aux intégrales de fonctions monogènes, se fait maintenant de la manière usuelle.

Remarquons enfin que les considérations du n° I s'étendent sans difficulté aux intégrales multiples, aussi bien que celles du n° II, aux intégrales des différentielles exactes, à un nombre quelconque de variables indépendantes.

Kolozsvar, 18 décembre 1904.

L. SCHLESINGER.

SUR UNE MANIÈRE D'EXPOSER LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

1. On sait que von STAUDT exposa, indépendamment de toute notion de distance, les principes de la Géométrie projective.

Son exposition est fondée sur les propriétés du quadrilatère complet. Je vais ici exposer la Géométrie projective d'une façon différente et que je crois plus simple. Je ne me servirai pas du quadrilatère complet.

J'admettrai les axiomes ordinaires concernant le point, la ligne droite, le plan.

On regardera deux droites situées dans un même plan comme se coupant toujours. Si le point d'intersection n'existe pas en réalité, on dira que les droites se coupent en un point fictif, ou idéal. Il sera toujours possible de projeter les droites sur un autre plan (en projection conique) de façon que leurs projections se coupent. Trois droites d'un plan se couperont en un même point idéal, si leurs projections se coupent en un même point réel.

---

[1] C. f. HEFFTER, *l. c.*, 1903, p. 123.

Trois plans qui n'ont pas une droite commune se couperont toujours en un point réel ou idéal.

L'exposé que je vais faire repose sur le théorème des triangles homologiques. *Si les trois droites* AA′ BB′ CC′ *sont concourantes, les points* $\alpha\,\beta\,\gamma$ *où se rencontrent* AB A′B′ ; AC, A′C′ ; BC, B′C′ *sont en ligne droite et* **réciproquement.**

Ce théorème, intuitif lorsque les deux triangles ABC, A′B′C′ sont dans deux plans différents, se démontre pour le cas de la figure plane, en considérant cette figure comme la projection d'une figure de l'espace. M. Hilbert, dans son mémoire sur les principes de la Géométrie, montre que si on laisse de côté la notion de distance, on ne peut démontrer le théorème dont nous parlons qu'en se servant de la Géométrie à trois dimensions.

J'emploierai dans ce qui suit les mots « parallèle » ou « equipollent » dans un sens nouveau, que je vais définir.

Je choisis un certain plan que je nomme « plan de l'infini. » Deux droites seront « parallèles » si elles se coupent dans le *plan de l'infini.* Il résulte de là que *deux parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.*

Dans ce qui suit *je me borne à la Géométrie plane.* Dans le plan j'aurai une *droite de l'infini,* et deux droites parallèles se rencontrant sur la droite de l'infini.

Un quadrilatère dont les côtés opposés sont « parallèles » se nommera un « parallélogramme. »

Je dirai que deux vecteurs AB et CD sont « équipollents » si AB et CD sont parallèles, ainsi que AC et BD. Il résulte de cette définition que si AB et CD sont équipollents, AC et BD sont aussi équipollents.

Deux vecteurs équipollents à un 3e sont équipollents entre eux. Soient en effet AB et CD deux vecteurs équipollents à EF, alors AB, CD, EF, concourent sur la droite de l'infini ; donc les triangles ACE, BDF sont homologiques, et comme AB et EF d'une part, CD et EF d'autre part se coupent sur la droite de l'infini, on en conclut que AC et BD se coupent aussi sur cette droite.

AB et CD d'une part, AC et BD d'autre part sont donc parallèles, ce qui démontre la proposition.

Si deux vecteurs sont situés sur une même droite, la définition de l'équipollence tombe en défaut. Nous dirons que deux vecteurs situés sur une même droite sont équipollents entre eux, s'ils sont équipollents à un même troisième.

L'addition géométrique de deux vecteurs se définit, comme dans la théorie ordinaire des équipollences, mais il faut ici démontrer la proposition suivante : si a et a' d'une part, b et b' d'autre part sont équipollents, $a + b$ et $a' + b'$ sont équipollents.

C'est-à-dire : si AB et A'B' sont équipollents, ainsi que BC et B'C' il en est de même de AC et A'C'.

Ou encore : *Si deux triangles ont deux couples de côtés équipollents, les troisièmes couples sont équipollents.*

En effet, par hypothèse AB et A'B' d'une part, AC et A'C' d'autre part, sont équipollents. Donc d'après ce qui précède, il en est de même de AA' et de BB' d'une part, de AA' et de CC' d'autre part ; d'où il suit que BB' et CC' sont équipollents entre eux, et par suite BC et B'C' le sont aussi.

La proposition est donc démontrée.

Les propriétés de l'addition géométrique : $a + b$ est équipollent à $b + a$, $a + (b + c)$ est équipollent à $(a + b) + c$ s'aperçoivent facilement.

Le cas où les segments à additionner sont équipollents entre eux doit être traité à part ; c'est sur ce cas particulier que repose tout ce qui suit.

Soient deux vecteurs AB et CD parallèles à une même droite $\triangle$. Prenons sur $\triangle$ un point M, et construisons MN équipollent à AB, et NP équipollent à CD, alors MP sera équipollent à la somme des deux segments.

On peut démontrer que l'addition est commutative dans ce cas particulier de la façon suivante. (Le lecteur est prié de faire la figure). Ayant effectué la construction précédente prenons MK équipollent à CD. Il s'agit de faire voir que KP est équipollent à AB, ou que BP et AK sont équipollents. Ceci résulte d'un théorème énoncé ci-dessus : Les deux triangles AMK, BNP ayant deux couples de côtés équipollents ont leurs troisièmes côtés équipollents.

Considérons une droite OX. Prenons un segment AB pa-

rallèle à OX, que nous nommerons le segment *unité*. Nous pourrons construire sur OX un segment équipollent à n fois AB, en ajoutant n fois à lui-même le segment AB. On aura ainsi le point d'abcisse n ; en remplaçant AB par BA on construirait le point d'abcisse $-n$.

Si deux triangles, ABC, A'B'C' *ont leurs côtés parallèles deux à deux, et si* AB *est équipollent à* A'B', *les autres côtés sont aussi équipollents deux à deux.* En effet dans nos deux triangles les points de concours des côtés correspondants sont en ligne droite (sur la droite de l'infini). Donc les triangles sont homologiques, et les droites AA', BB', CC' concourent au même point. Ce point est sur la droite de l'infini, puisque AB est équipollent à A'B'. Donc ACC'A' BCC'B' sont des parallélogrammes, et la proposition est démontrée.

Si deux couples de droites parallèles interceptent sur une première droite $\triangle$ des vecteurs AB, CD équipollents, ils interceptent sur une seconde droite $\triangle'$ des vecteurs $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ équipollents.

Pour le démontrer on mènera par α et γ des parallèles à $\triangle$, la première coupant Bβ en H, la seconde coupant Dδ en K ; on remarquera alors que d'après le théorème précédent les deux triangles α H β, γ K δ ont leurs côtés équipollents.

Le théorème sur les lignes proportionnelles, tel qu'on l'énonce et le démontre au début du troisième livre de géométrie, peut maintenant être énoncé et démontré en attribuant un sens nouveau au mot *rapport de deux lignes*. Considérons deux vecteurs *parallèles* AB et CD, si AB est équipollent à la somme de p segments α, et CD à la somme de q segments α on dira que le rapport des deux vecteurs est $\frac{p}{q}$.

Dans ces conditions, et à l'aide de ce qui précède on démontrera, de la même façon qu'au début du troisième livre de Géométrie, dans tous les ouvrages élémentaires usités en France, le théorème suivant :

Sur deux droites $\triangle$ et $\triangle'$ des parallèles interceptent des segments proportionnels.

On pourra alors, comme on le fait en Géométrie élémentaire, *mais avec le changement convenable dans le sens des*

mots, résoudre le problème suivant : Partager un vecteur AB en n vecteurs équipollents. Nous avons vu ci-dessus, comment on pouvait prendre sur une droite OX un vecteur ayant pour *abcisse* un nombre positif ou négatif mais *entier*. A l'aide des propositions précédentes on pourra prendre sur OX un vecteur ayant pour abcisse un nombre positif ou négatif, entier ou fractionnaire.

2. — Peut-être le lecteur trouvera-t-il l'exposé précédent trop long pour un aperçu, trop court pour un exposé complet. Je n'ai pas voulu exposer les choses tout au long, comme il serait nécessaire de le faire par exemple à des élèves dans une classe, je n'ai pas voulu non plus être trop sommaire, de peur d'être obscur.

A l'aide de ce qui précède on donne à un point M des coordonnées de la façon suivante. On a deux axes de coordonnées OX et OY ; des parallèles aux axes menées par M, (le mot parallèle étant toujours pris dans le sens spécial que nous lui donnons) coupent l'une OX en A l'autre OY en B. Les abcisses de A et de B calculées comme il est expliqué ci-dessus, sont les coordonnées de M.

Pour avoir l'équation d'une droite joignant les points P et Q, considérons un point M sur cette droite, le rapport des segments PM et PQ est égal à celui de leurs projections sur OX faites parallèlement à OY d'après le théorème sur les vecteurs proportionnels. C'est donc :

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

x_0, x_1, x étant les abcisses respectives de P, Q et M ; c'est de même :

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0};$$

on a donc l'équation de la ligne droite

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0};$$

c'est une équation du premier degré.

De là on peut déduire toute la Géométrie analytique projective.

3. — Cette manière d'exposer la Géométrie présente les caractères suivants :

1° On ne se sert pas de l'infini, *au sens ordinaire du mot.* Les points à l'infini sont les points d'une droite arbitraire, s'il s'agit de Géométrie plane, d'un plan arbitraire, s'il s'agit de Géométrie dans l'espace.

2° Comme conséquence le mot « équipollent » n'a pas le même sens que dans la Géométrie ordinaire, mais toutes les propriétés des équipollences subsistent, avec le nouveau sens attribué aux mots.

3° Si on nomme *translation* une transformation changeant les droites en droites, et changeant en lui-même tout point de la droite de l'infini, telle que deux vecteurs transformés l'un de l'autre soient équipollents ; ce qui précède peut être nommé Géométrie de la translation. Dans cette Géométrie on ne compare jamais deux vecteurs qui ne sont pas parallèles. Cette proposition AB = CD n'a de sens que si AB et CD sont parallèles.

4° Si on redonnait au mot « droite de l'infini » son sens ordinaire, cela reviendrait à admettre le postulatum d'Euclide.

En somme nous avons défini « l'infini » *de façon que le postulatum d'Euclide soit vrai.*

4. — Dans cette façon d'envisager la Géométrie le postulatum est donc vrai par *définition ;* non pas par la définition de la ligne droite ou de la distance, mais par la définition de l'infini.

Or on sait que si l'on admet le postulatum d'Euclide, il n'y a plus qu'*une* Géométrie métrique possible, la Géométrie euclidienne. Il est donc possible, sans axiome nouveau, de constituer la Géométrie euclidienne. Il suffira de définir la *rotation.* Il suffira même de définir la rotation autour de l'origine, car une rotation quelconque résulte d'une rotation autour de l'origine et d'une translation. C'est ce que nous allons essayer de faire dans ce qui suit, *en montrant que la définition donnée est la seule possible.*

Les rotations du plan autour de l'origine doivent être des

transformations changeant les droites en droites, changeant l'origine en elle-même, et n'altérant pas la droite de l'infini. Ces rotations doivent former un groupe. De plus, aucune droite réelle passant par l'origine ne doit rester immobile dans la rotation, et une rotation finie ramenant OX sur lui-même doit ramener sur eux-mêmes tous les points de OX.

Les transformations n'altérant pas l'origine ni la droite de l'infini, et changeant les droites en droites sont évidemment de la forme

$$x' = ax + by$$
$$y' = px + qy$$

$a\ b\ p\ q$ seront des fonctions du paramètre t qui pour $t = 0$ donneront la transformation identique, et par conséquent se réduiront respectivement à 1 0 0 1. Soient A B P Q les valeurs respectives des dérivées de $a\ b\ p\ q$ pour $t = 0$. La transformation infiniment petite sera :

$$x' = x + (Ax + By)\,dt$$
$$y' = y + (Px + Qy)\,dt$$

On voit facilement qu'une droite passant par l'origine

$$ux + vy = 0$$

demeurera inaltérée par la transformation si :

$$\frac{Au + Pv}{u} = \frac{Bu + Qv}{v}$$

λ étant la valeur commune de ces rapports, devra être racine de l'équation :

$$(A - \lambda)(Q - \lambda) - PB = 0\ .$$

Comme aucune droite réelle ne doit rester immobile dans la rotation, cette équation doit avoir ses racines imaginaires. Supposons qu'il en soit ainsi. Il y aura alors deux droites imaginaires restant immobiles dans cette rotation infiniment petite et par suite dans toute rotation qui résulte de la répétition de celle-ci.

Soient

$$X + iY = 0 \qquad X - iY = 0$$

les équations de ces deux droites, X et Y étant des polynomes linéaires et homogènes du premier degré, réels.

Alors une rotation transforme X^2+Y^2 dans le même polynome multiplié par un facteur λ^2, nécessairement positif, qui sera une fonction du paramètre t; si l'on écrit

$$X'^2 + Y'^2 = \lambda^2 (X^2 + Y^2)$$

on en déduira facilement :

$$X' + iY' = \lambda e^{i\varphi} (X + iY)$$

$$X' - iY' = \lambda e^{-i\varphi} (X - iY)$$

φ étant comme λ une fonction de t. En donnant à φ la valeur 2π on reproduit la transformation identique ; chaque droite revient sur elle-même, mais d'après les conditions imposées à la transformation *tout point doit revenir sur sa position primitive*, donc λ^2 doit être égal à *un*. Si on veut que pour $t = 0$, $\varphi = 0$ il faut prendre $\lambda = 1$ on a alors les formules ordinaires de la rotation.

Ce qui précède montre comment on peut constituer une sorte de Géométrie où le postulatum d'Euclide est vrai, par définition.

5. — Dans l'enseignement de la Géométrie projective, qu'on emploie ou non l'analyse, on devra, pour rester suffisamment élémentaire, procéder d'une façon différente.

Au lieu de définir le mot « parallèle » comme nous l'avons fait, on admettra le postulatum d'Euclide. Deux vecteurs équipollents seront par définition les côtés d'un parallélogramme. On refera ce que nous avons fait, mais en donnant aux mots leur sens ordinaire. Tout ce que nous avons dit subsistera, sauf cette proposition : Deux parallèles à un troisième sont parallèles entre elles. Ceci devra se démontrer, comme on le fait d'habitude dans les géométries où l'on commence par les droites et plans parallèles.

On pourra aussi admettre d'emblée, pour abréger, cette proposition : « Des droites ou des plans parallèles découpant sur une première droite des vecteurs équipollents entre

eux, déterminent sur une seconde droite des vecteurs équipollents entre eux. »

Si l'on nomme translation une transformation changeant un vecteur en un vecteur équipollent, la Géométrie ainsi exposée est la Géométrie de la translation [1].

Lorsqu'on ne se sert pas de l'analyse il convient de démontrer d'abord le théorème des transversales, de la façon suivante :

Soit pour fixer les idées un quadrilatère ABCD, coupé par une transversale en $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$. On projettera tous les points sur une droite $\triangle$, parallèlement à la transversale. ABCD se projettent en $a\ b\ c\ d$, et tous les points de la transversale se projettent en un même point m. On aura par exemple

$$\frac{A\alpha}{\alpha B} = \frac{am}{mb}$$

d'après le théorème des vecteurs proportionnels.

En multipliant membre à membre les quatre égalités analogues à celles-ci on démontrera le théorème. (Il faut observers que les égalités ont lieu en signe).

Le théorème sur le rapport anharmonique se déduit de là. Un faisceau de sommet S étant coupé par deux sécantes en ABCD et $a\ b\ c\ d$, on démontrera l'égalité des deux rapports anharmoniques en appliquant le théorème des transversales au quadrilatère A B $a\ b$, coupé par les deux sécantes SCc SDd.

6. — On expose ainsi la Géométrie projective d'une façon simple, sans se servir du début si lourd et si pénible de la Géométrie ordinaire. Euclide dit un jour, paraît-il, qu'il n'y avait pas de chemin royal en Géométrie. On a dit depuis que la Géométrie projective était ce chemin royal. Ce que nous venons de dire permet d'atteindre ce chemin royal sans s'écorcher les pieds aux broussailles de la Géométrie métrique élémentaire.

J. Richard (Dijon).

[1] On pourrait exposer cette théorie en définissant la translation à la manière de M. Méray.