Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 7 (1905)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES AXIOMES DE LA GÉOMÉTRIE
Autor: Combebiac, G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-8451

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Mais, d'un autre côté, on a

$$\log \frac{\pi x}{\sin \pi x} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{2m-1}\pi^{2m}}{m(2m)!} B_{2m-1} x^{2m} .$$

On trouve donc

$$B_{2m-1} = \frac{m(2m)!}{2^{2m-1}} \sum (-1)^i \frac{(i-1)!}{\beta!\,\delta!\,\omega!\,\ldots} \left(-\frac{1}{3!}\right)^{\beta} \left(\frac{1}{5!}\right)^{\delta} \left(-\frac{1}{7!}\right)^{\omega} \ldots$$

Cette formule est celle que nous nous proposions d'obtenir.

F. Gomes Teixeira (Porto).

LES AXIOMES DE LA GÉOMÉTRIE

Les études que nous avons successivement publiées dans cette Revue[1] sur les Principes de la Géométrie appellent rationnellement, à titre de conclusion, une vue d'ensemble sur la Géométrie tout entière.

Etablir les axiomes de la Géométrie, c'est réduire cette science à être une *application* d'une théorie plus générale et indépendante de tout élément géométrique.

La théorie plus générale dont la Géométrie est une simple application n'est autre que celle des *ensembles*.

Cette théorie, dont la terminologie a été abondamment utilisée, dans ces dernières années, dans de nombreux travaux sur l'Analyse numérique, a reçu peu de développement en ce qui concerne ses parties les plus générales, bien que tous les éléments essentiels de la théorie intégrale des ensembles semblent réunis dans l'œuvre géniale de G. Cantor.

---

[1] *L'Ens. Math.*, 7e année, p. 270-291 ; p. 375-381.

M. Poincaré a esquissé, dans son ouvrage récent « La valeur de la Science », la voie à suivre pour définir le nombre des dimensions et le degré de connexion d'un ensemble. Sous réserve des éclaircissements que nécessiteraient encore ces questions, on peut, dès à présent, énoncer l'*axiome géométrique* sous la forme suivante :

A. — *L'espace ponctuel est un ensemble continu, à trois dimensions, à simple connexion et ouvert.*

Chacun de ces qualificatifs exigerait une explication ressortissant à la théorie des ensembles. Bornons-nous à observer que les propriétés exprimées par l'axiome A ne sont pas, à proprement parler, des attributs de l'espace « en soi », mais spécifient seulement ses relations avec certaines opérations, qui doivent figurer parmi les concepts fondamentaux, au même titre que le concept de point lui-même. M. Poincaré a même émis l'idée, dans l'ouvrage précité, que le nombre des dimensions de l'espace est purement subjectif et pourrait augmenter, notamment si certaines connexions intellectuelles de l'homme venaient à défaillir. La démonstration de l'illustre géomètre ne nous a pas convaincus[1]. En revanche, nous n'apercevons aucun motif pour rejeter *a priori* l'idée que l'on pourrait être amené, par des considérations astronomiques par exemple, à voir dans l'espace ponctuel un ensemble *fermé*, ce qui entraînerait la suppression de l'idée de l'infini géométrique.

De l'axiome A dérive la Géométrie tout entière, sans qu'il soit nécessaire de lui rien ajouter. Toutefois, l'on ne peut pas oublier que la majeure partie de l'intérêt que présente la Géométrie se rapporte à certaines figures et à certaines opérations géométriques, qui, pour cette raison, ont paru constituer des éléments essentiels de la notion d'espace. C'est ainsi que la Géométrie projective a pour objet l'étude des propriétés des figures par rapport aux lignes droites. Cette étude repose uniquement sur les propriétés exprimées par la proposition suivante :

[1] L'accord des diverses sensations musculaires d'accomodation (œil et bras, par exemple) résulte, non pas d'une harmonie préétablie, mais bien d'une éducation de l'esprit : l'enfant cherche dans le voisinage immédiat de son œil les objets dont il reçoit une impression lumineuse (Helmholtz, Taine, etc.).

P. — *Les droites sont des lignes illimitées et ouvertes formant un ensemble qui jouit des propriétés suivantes :*

1° *une de ces lignes est déterminée dans l'ensemble par la condition de passer par deux points distincts, d'ailleurs quelconques, de l'espace ;*

2° *toutes les lignes de l'ensemble qui s'appuient sur deux d'entr'elles concourantes sont situées sur une même surface ;*

3° *l'ensemble présente la propriété de l'unicité de l'asymptotique.*

La proposition P réduit la Géométrie projective à n'être qu'une *application* de la théorie plus générale des ensembles de lignes définis ci-dessus. C'est cette théorie générale qui constitue, à proprement parler, un chapitre de la Géométrie. Rationnellement, les lignes droites n'ont pas plus à intervenir en Géométrie que l'espace ponctuel dans la théorie des ensembles ; d'ailleurs elles ne se distinguent des autres lignes illimitées et ouvertes par aucune propriété *géométrique*, car les propriétés stipulées par la proposition P, non seulement se rapportent à l'*ensemble* des lignes droites (et non à ces lignes elles-mêmes), mais encore s'appliquent à une infinité d'autres ensembles de lignes.

Il est temps d'en finir avec la formule, qui a fait fortune : « les axiomes sont des définitions déguisées ». Pas plus que la proposition A ne définit l'espace ponctuel, la proposition P ne saurait, à aucun titre, constituer une définition ni de l'ensemble des droites, qui n'est pas le seul à jouir des propriétés stipulées, ni, *a fortiori*, des lignes droites elle-mêmes qui y sont à peine visées. De fait, le concept de la ligne droite préexiste à la proposition P. Comme tous les concepts, y compris celui d'espace et celui de temps[1], il a une origine sensorielle, empirique : c'est là tout le *credo* de la théorie empiristique de la connaissance par opposition à l'*apriorisme* kantien et à la conception métaphysique (existence d'un *substratum* en soi). Bien que le concept de ligne droite ne corresponde à aucun objet matériel et passible d'expérience, il n'en existe pas moins dans l'esprit, et ses propriétés peuvent

[1] Lire l'admirable analyse : Guyau, *La Genèse de l'idée de Temps*, Alcan, Paris, 1902.

être constatées au moyen de l'*intuition* prise dans son sens étymologique (*intueri*, contempler), bien entendu à condition de n'en inférer aucune conséquence physique ; mais ces propriétés ne constituent pas une définition.

A vrai dire, on peut objecter que le sens d'un mot est arbitraire ; oui, mais le bel avantage de lui donner une signification plus générale, si l'on est obligé de lui trouver un remplaçant ! N'est-il pas plus raisonnable, lorsque l'on est amené à généraliser certaines théories, d'adopter une terminologie spéciale pour la catégorie plus générale ainsi définie, en maintenant aux anciens termes leur signification ? En ce faisant, on éviterait les formes paradoxales et l'on s'abstiendrait de fournir des arguments — combien pauvres à la vérité ! — aux métaphysiciens et aux théologiens, qui n'ont jamais en vue la recherche de la vérité, mais qui poursuivent inlassablement, dans les prétendues antinomies de la raison, la justification du fragile et puéril roman murmuré par la tarentule qui les obsède.

Un concept, pour exister, n'a pas besoin d'être défini *logiquement*. Le concept de point, le concept de nombre entier sont parfaitement *définis*, bien qu'ils ne soient pas susceptibles d'être ramenés, par des *définitions logiques*, à d'autres concepts plus généraux. Mais ces concepts admettent des *axiomes* permettant de faire rentrer leur étude dans des théories plus générales.

En somme, du point de vue strictement rationnel, la proposition P ne doit pas être considérée comme un axiome *géométrique ;* mais elle constitue bien un axiome pour la théorie des lignes droites, qu'elle réduit ainsi à n'être qu'une application de la Géométrie.

La Géométrie métrique donne lieu aux mêmes observations. Elle constitue la théorie des *déplacements sans déformation*, concept manifestement issu de la notion la plus vulgaire des corps solides naturels. Comme celui de la ligne droite, ce concept doit rationnellement être exclu de la Géométrie ; sa théorie devient une application de celle-ci en vertu de la proposition suivante :

M. — *Les déplacements sans déformation sont des trans-*

formations ponctuelles formant un groupe métrique qui jouit de la propriété archimédienne et dont les lignes axiales forment un ensemble présentant la propriété de l'unicité de l'asymptotique.

Les propositions A, P et M sont des axiomes exprimant simplement que certains concepts rentrent dans des catégories plus générales (c'est d'ailleurs là le contenu de toute proposition, en dépit de la récente théorie logique de l'implication). Ces propositions impliquent des théorèmes d'existence pour ces catégories plus générales. Ces théorèmes ressortissent, pour l'axiome A, à la théorie des ensembles et, pour les axiomes P et M (le premier de ces deux axiomes est, de fait, une conséquence du second moyennant une définition convenable des lignes droites), à la Géométrie.

G. Combebiac (Limoges).

ERRATA

Correction à l'article : *Les deux bases de la métrique* (n° du 15 septembre 1905, p. 375—381).

Page 378, avant-dernière ligne : au lieu de « droite », il faut lire partout « ligne D ».

Page 379, 3e alinéa : au lieu de « en ligne droite », il faut lire partout « situés sur une même ligne D ».

SUR LE MOUVEMENT RELATIF ET LE MOUVEMENT DE LA TERRE

La question du mouvement absolu a été agitée il y a quelque temps. Elle est en quelque sorte, d'actualité.

Pour définir un mouvement il faut se donner un corps solide de comparaison, par exemple un trièdre trirectangle T,