Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 7 (1905)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sous ce titre nous publions les remarques et renseignements concernant plus ou moins directement l'enseignement mathématique, telles que des descriptions d'instruments ou d'appareils nouveaux, etc. Quant à la correspondance, elle permet à tout lecteur de présenter sous une forme rapide les idées qui lui semblent utiles, les remarques suggérées par la lecture d'un article, ou les questions sur lesquelles il aurait besoin d'un renseignement.

LA RÉDACTION.

Démonstration élémentaire du Théorème de Feuerbach.

Le cercle des neufs points d'un triangle est tangent intérieurement au cercle inscrit et extérieurement au cercle ex-inscrit.

Il existe de nombreuses démonstrations de ce théorème célèbre. Celle que je présente ci-après est établie uniquement sur les trois premiers livres d'Euclide, et, à ce point de vue, offre peut-être quelque intérêt.

Il est évident que, dans le cas où le triangle est isoscèle, le cercle des neuf points est tangent au milieu de la base, intérieurement au cercle inscrit et extérieurement au cercle ex-inscrit de l'angle correspondant, et qu'il coïncide avec le cercle inscrit dans le cas où le triangle est équilatéral. Nous allons donc démontrer le théorème dans le cas général où le triangle a deux côtés différents.

Dans le triangle ABC nous supposons que le côté AC est plus grand que le côté AB et soient :

A′ le milieu du côté BC;
B′ » » CA;
D le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet A sur le côté BC;
I le centre du cercle inscrit au triangle ABC;
Q le milieu de l'arc A′B′D du cercle des neuf points;
W le point de rencontre de AI avec BC.

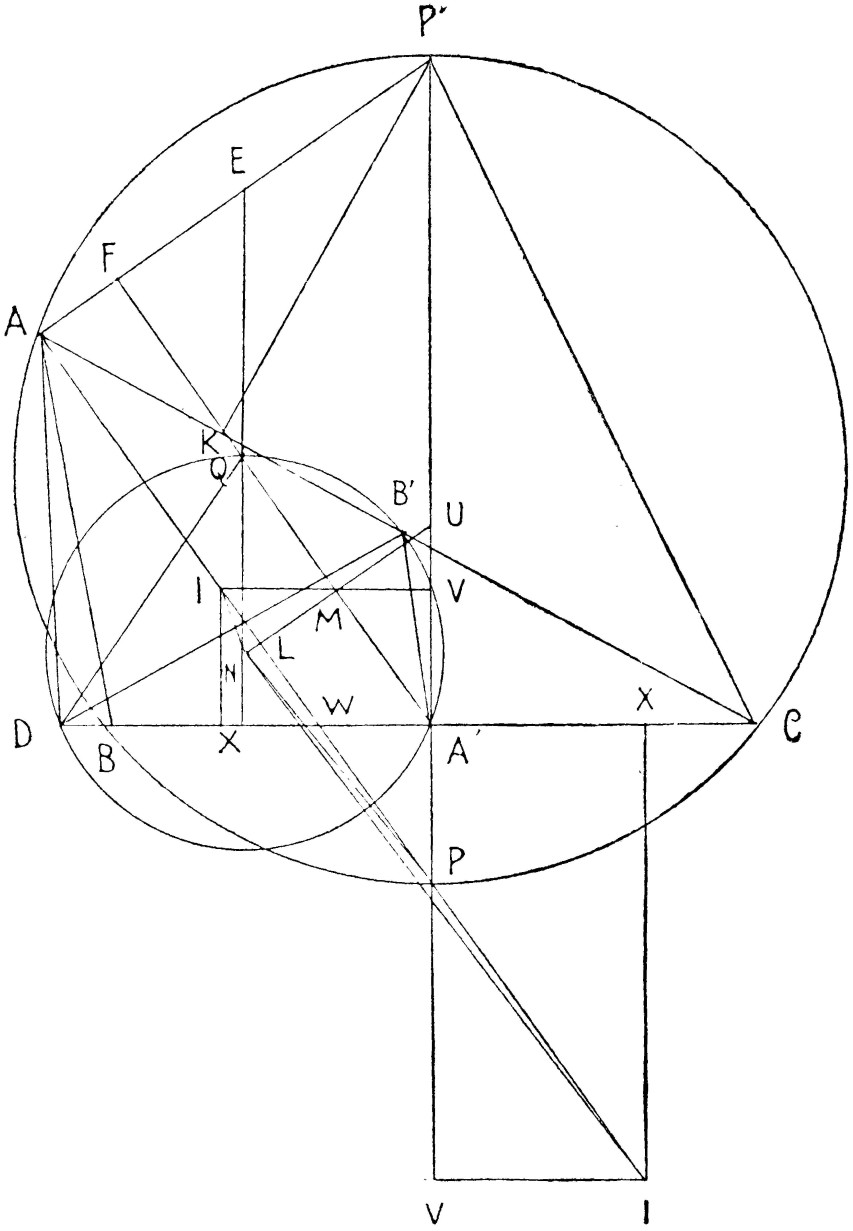
Alors, puisque A′B′ est parallèle à BA, on a

$$\sphericalangle B'A'D = \sphericalangle C + \sphericalangle CAB \qquad \sphericalangle B'DA' = \sphericalangle C$$

et

$$\sphericalangle QA'D = \frac{1}{2}(\sphericalangle B'A'D + \sphericalangle B'DA') = \frac{1}{2}(\sphericalangle C + \sphericalangle CAB + \sphericalangle C)$$

$$= \sphericalangle C\,\frac{1}{2} + \sphericalangle CAB \quad \therefore \quad \sphericalangle QA'D = \sphericalangle AWB\ .$$



Donc A'Q est parallèle à IA.

Soient ensuite

P le milieu d'arc BC du cercle circonscrit;
N le centre du cercle des neuf points;
PP' le diamètre du cercle circonscrit;
E le point de rencontre de QN avec AP';
F » » A'Q » AP';
K » » A'Q » AC;

L le point de rencontre avec AP de la perpendiculaire passant par N ;
M » » de cette perpendiculaire avec A'Q ;
U » » » » PP' ;
V le pied de la perpendiculaire abaissée de I sur PP' ;
X » » » BC.

En conséquence, on a

$$A'M = MQ \quad \therefore \quad NM \perp A'Q$$

$$\therefore \quad \triangle MA'U = \triangle MQN \ , \quad MN = MU \ , \quad A'U = NQ \ .$$

Maintenant, dans le triangle PNU, on a

$$\overline{PU}^2 - \overline{PN}^2 = 2NU \, . \, LM \ .$$

Mais

$$2NU \, . \, LM = 2EP' \, . \, AF = AP' \, . \, AF$$

$$\sphericalangle A'KC = \sphericalangle PAC = \sphericalangle A'P'C$$

Le quadrilatère A'KP'C peut donc être inscrit dans un cercle. Et on a

$$\sphericalangle P'KC = \sphericalangle P'A'C = 1 \text{ droit} \ .$$

D'ailleurs, dans le triangle rectangle AP'K,

$$AP' \, . \, AF = \overline{AK}^2 \ ;$$

mais

$$AK = \frac{1}{2}(AC - AB) = A'X$$

$$\overline{A'X}^2 = \overline{VI}^2 = \overline{PI}^2 - \overline{PV}^2$$

$$\therefore \quad \overline{PU}^2 - \overline{PN}^2 = \overline{PI}^2 - \overline{PV}^2$$

ou

$$\overline{PN}^2 + \overline{PI}^2 = \overline{PU}^2 + \overline{PV}^2 \ . \quad (\alpha)$$

Le point A' est le milieu entre le point X et le point de tangence avec BC du cercle ex-inscrit du triangle ABC ; la droite joignant le centre du cercle inscrit à celui du cercle ex-inscrit est divisée en deux parties égales au point P, et la projection orthogonale de la droite est aussi divisée en deux parties égales en même point.

Employant les mêmes lettres pour le cercle ex-inscrit comme pour le cercle inscrit, nous avons le résultat suivant :

$$\overline{IN}^2 = \overline{PN}^2 + \overline{PI}^2 \mp 2PI \,.\, PL \;;$$

moins ou plus, suivant qu'il s'agit du cercle inscrit ou du cercle ex-inscrit.

Joignant ce résultat à la relation (α) et observant que I, L, V, U sont sur le même cercle ($PI.PL = PU.PV$), nous obtenons

$$\overline{IN}^2 = \overline{PU}^2 + \overline{PV}^2 \mp 2PU \,.\, PV = (PU \mp PV)^2$$

$$= \overline{VU}^2 = (A'U \mp A'V)^2 = (NQ \mp IX)^2$$

$$\therefore \quad IN = NQ \mp IX \,.$$

Ainsi la distance entre le centre du cercle des neuf points et le mi-centre est égale à la différence de leurs rayons ; donc les deux cercles sont tangents intérieurement.

La distance entre le centre du cercle des neuf points et le ex-centre est égale à la somme de leurs rayons ; donc les deux cercles sont tangents extérieurement.

V. Sawayama (Tokio).

Sur les racines des équations algébriques.

Les remarques présentées par M. Kariya (v. n° du 15 septbr. 1905 ; p. 398-399) au sujet de ma note parue en juillet 1904 (p. 297 et suivantes) reposent sur un malentendu. Il s'agit du théorème suivant :

Si dans un polynome entier avec tous ses termes positifs ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, le rapport d'un coefficient au précédent ne va pas en croissant, l'équation que l'on obtient en égalant le polynome à zéro a nécessairement des racines imaginaires.

L'erreur de M. Kariya résulte de ce qu'il ne tient pas compte de la distinction que nous faisons entre l'ordre des coefficients et l'ordre des rapports de ces coefficients. En disant que *le rapport d'un coefficient au précédent ne va pas en croissant*, nous entendons 1° que dans le polynome

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m,$$

on prend comme ordre des coefficients l'ordre des indices et l'on forme les rapports

$$\frac{a_1}{a_0} = \lambda_1 \,, \quad \frac{a_2}{a_1} = \lambda_2 \ldots . \quad \frac{a_m}{a_{m-1}} = \lambda_m \,;$$

2° que l'on ordonne les λ en commençant par celui qui correspond *au terme constant* du polynome, c'est-à-dire que l'on envisage la suite

$$\lambda_m, \quad \lambda_{m-1}, \ldots\ldots \quad \lambda_1,$$

tandis que M. Kariya envisage celle que l'on obtient en commençant par λ_1.

Il suffirait d'ailleurs pour faire la distinction dont nous parlons de voir tout simplement la conclusion de notre démonstration (loc. cit.). Or, précisément pour cette démonstration M. Kariya ajoute qu'il n'en ressort pas que l'équation a nécessairement des racines imaginaires. C'est une autre erreur de sa part qui nous oblige de nous expliquer sur quelques points de cette démonstration. D'après le théorème classique de Descartes sur le nombre des variations d'un polynome, un polynome entier avec tous ses termes positifs n'a aucune racine positive, par conséquent, si un tel polynome n'a pas toutes ses racines négatives, *il aura nécessairement des racines imaginaires,* donc, si nous trouvons une propriété des coefficients d'un polynome qui existe nécessairement quand toutes les racines sont négatives, nous aurons aussi, dans le cas ou le polynome a tous ses termes positifs, une condition suffisante pour l'existence nécessaire des racines imaginaires. Cette condition consiste évidemment en ce que les coefficients de ce polynome ne jouissent pas de la dite propriété.

Une telle propriété est la suivante :

Les rapports λ des coefficients d'un polynome ayant toutes ses racines négatives vérifient nécessairement les inégalités :

$$\lambda_m < \lambda_{m-1} < \ldots < \lambda_2 < \lambda_1 .$$

C'est précisément ce que nous avons démontré dans l'article cité. *(L'Ens. mathém., 15 juillet 1904, page 298.)*

P. Zervos (Athènes).

Théorie de la droite et des parallèles.

Les « définitions » classiques de la droite et des parallèles ne sont pas des définitions ; ce sont des théorèmes, c'est-à-dire des propositions à démontrer.

Qu'on veuille bien y réfléchir : Pas plus que la propriété d'être la plus courte de toutes les lignes menées entre deux points ne définit ce qu'est, mathématiquement, la qualité de droite pour une ligne, le fait de ne pas se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge ne dit l'essence du parallélisme, ne précise de façon

scientifique ce que c'est, pour deux droites, que d'être, dans toute leur étendue, c'est-à-dire essentiellement, parallèles, « para-allèlon », « à côté l'une l'autre ».

Que si, au contraire, nous définissons la ligne droite la ligne de direction constante, comme en mécanique le mouvement uniforme est défini le mouvement de vitesse constante, nous n'avons plus rien que de conforme à la raison.

Parmi l'infinité des mouvements imaginables, il est un mouvement, sinon effectif, du moins possible, dans lequel la vitesse reste constamment égale à elle-même. Ce mouvement est dit uniforme.

De même, en géométrie, parmi toutes les lignes qui nous sont données dans l'intuition spatiale, il en est une dont la direction reste constamment égale à elle-même. Cette ligne est dite droite.

Même avantage logique, même simplicité et même précision, si nous définissons les droites parallèles des droites de même direction.

Et comme l'ordre appelle l'ordre, de cette substitution de définitions vraies, j'entends qui sont des définitions, à des pseudo-définitions, résulte l'ordonnance la plus parfaite dans la science, et les questions insolubles — dans les termes donnés — ne se posent même pas.

Ne se pose pas la question : « Entre deux points peut-on mener plus d'une droite ? ». En effet, deux points *déterminent* une ligne ayant la même direction dans toute son étendue, c'est-à-dire une droite.

Ne se pose pas non plus celle-ci : « Par un point peut-on mener plus d'une parallèle à une droite ? ». En effet, la droite donnée *détermine*, en un point quelconque de l'espace, une droite ayant la même direction, c'est-à-dire sa parallèle en ce point.

Il est facile de montrer : 1° que des définitions se déduit, par un jugement apodictique, l'*axiome* des parallèles coupées par une transversale ; 2° qu'une démonstration rigoureuse et de forme identique à celle de toutes les propositions subséquentes de la science géométrique s'applique à ces premiers théorèmes qui sont les prétendues définitions de la droite et des parallèles.

L. L. Fabre (Paris).

Note de la Rédaction. — L'idée de définir la droite à l'aide de la notion de direction n'est pas nouvelle ; utilisée dans plusieurs traités elle a été abandonnée parce qu'elle se base sur une notion de nature différente, qui, du reste, doit être préalablement définie. La droite, de même que le point, peuvent être considérés comme des notions indéfinissables ; ce sont des notions claires par elles-mêmes. Nous renvoyons ceux de nos lecteurs qui désirent trouver une étude comparée des différentes définitions proposées pour la

droite et les parallèles, entre autres aux Ouvrages de M. SCHOTTEN, *Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts*, Leipzig, 2 vol., 1890, 1893, et de M. J. RICHARD, *Sur la Philosophie des Mathématiques*, Paris, 1903. Voir aussi : *Les Principes des mathématiques*, par M. COUTURAT, Rev. de Métaph. et de Mor., 1904.

LA RÉDACTION.

CHRONIQUE

Congrès des mathématiciens allemands ; Meran, 1905.

La réunion annuelle de l'Association allemande des mathématiciens a eu lieu cette année à *Meran*, du 24 au 30 septembre, en même temps que le 77me congrès des naturalistes et médecins allemands. Elle a été présidée par M. STAECKEL (Hanovre) assisté de MM. KRAZER et GUTZMER.

La séance administrative, ainsi que les réunions scientifiques fournissent une nouvelle preuve de l'activité considérable de l'Association, qui compte aujourd'hui 666 membres. La première était consacrée aux objets suivants :

Rapport sur l'exercice 1904-1905. — Rapport sur les publications entreprises par l'Association. — Rapport des commissions. — Rapport financier du IIIme congrès international des mathématiciens[1]. — Revision des statuts. — Création des « Archives des mathématiciens » dont le but serait de conserver les legs scientifiques, manuscrits, etc,... de mathématiciens décédés. — Organisation du IIme Centenaire d'Euler pour 1907.

M. PRINGSHEIM (Munich) a été nommé président pour le nouvel exercice. La prochaine réunion aura lieu à *Stuttgart*.

Les communications scientifiques, au nombre de 24, ont été réparties sur cinq séances ; en voici la liste :

1. CZUBER (Vienne) : La question de l'introduction des éléments de calcul infinitésimal dans les écoles moyennes, examinée au point de vue autrichien.

2 et 3. DOKULIL (Vienne) : La photogrammétrie au service de l'histoire de l'art. — Construction et examen de vues stéréoscopiques.

4 et 5. EPSTEIN (Strasbourg) : Sur la fonction de ζ Riemann et ses extensions (Rapport). — Théorèmes corrélatifs dans la théorie de la puissance par rapport à un cercle.

---

[1] Les recettes (subventions, cotisations, reliquat du IIe Congrès) se montent à Mk. 22873.27, et les dépenses à Mk. 20988.89 ; il reste donc en caisse Mk. 1884.38.