Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 7 (1905)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: BIBLIOGRAPHIE

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Lowe : Theory of Potential, 2. Elements of the Calculus (for Students of Science), 2. — J. W. Russell : Algebra of Quantics, 2. — P. J. Kirkby : Higher Algebra, 1. — A. L. Dixon : Calculus of Finite Differences, 1. — J. E. Campbell : Geometry of Surfaces, 1. — C. H. Sampson : Higher Solid Geometry (continued), 1. — C. H. Thompson : Dynamics of a Particle, 3. — H. T. Gerrans : Hydrodynamics, 2. — C. E. Haselfoot : Theory of Equations, 1. — A. L. Pedder : Trigonometry, 1. — C. Leudesdorf : Geometry (Maxima and Minima, Inversion, &c.), 2. — A. E. Jolliffe : Analytical Geometry (continued), 2. — C. H. Sampson : Solid Geometry, 2. — R. F. McNeile : Integral Calculus, 2. — E. H. Hayes : Elementary Mechanics, 3.

Paris ; Collège de France (Cours du 1er semestre 1904-1905). — Mécanique analytique et Mécanique céleste ; M. Hadamard, suppléant : Equations de l'Elasticité (2 leçons par semaine). — Mathématiques ; M. Humbert, suppléant : Fonctions abéliennes (2 leçons par semaine). — Mathématiques (Fondation Claude Antoine Peccot) ; M. Henri Lebesgue, chargé du cours : Séries trigonométriques (1 leçons par semaine).

BIBLIOGRAPHIE

Annuaire pour l'an 1905, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifiques. — 1 vol. in-16 de près de 800 pages avec figures : **1** fr. **50** (franco, **1** fr. **85** ; s'adr. à la Librairie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris).

Nous venons de recevoir l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1904. — Ce petit volume compact contient, comme toujours, une foule de renseignements indispensable à l'ingénieur et à l'homme de Science. Parmi les Notices de cette année, signalons tout spécialement celle de M. P. Hatt, **Explication élémentaire des marées.**

Gino Loria. — **Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven.** Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem Italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Fritz Schütte. Mit 174 Figuren und 17 lithographierten Tafeln. — 1 vol. in 8° de 744 pages. Prix M. 28.—. B. G. Teubner, Leipzig.

Le présent ouvrage est un catalogue méthodique de toutes les courbes planes que les géomètres ont eu à considérer depuis les temps les plus reculés de l'antiquité jusqu'à nos jours. La publication d'un tel ouvrage était dans l'air depuis longtemps, et l'auteur lui-même se plaît à rendre hommage à ceux qui, avant lui, ont contribué à cette rude besogne.

Dans ces dix dernières années, la chose était revenue à maintes reprises sur le tapis. Des questions furent posées dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* à son sujet, notamment par M. Haton de la Goupillière, E. Lemoine, P. Tannery, et peu après l'Académie des Sciences de Madrid en faisait l'objet d'un concours. Il n'en aurait pas fallu tant pour montrer l'importance

d'un sujet sur lequel les meilleurs traités de géométrie analytique étaient bien peu complets.

En 1897, une première et magistrale réponse fut faite par M. H. Brocard. Ce géomètre publia deux volumes autographiés, sous le titre de *Notes de bibliographie des Courbes géométriques* qui montraient l'extrême compétence de leur auteur et, dans la préface de l'ouvrage qu'il publie aujourd'hui, M. Gino Loria rend un juste hommage à M. Brocard, en déclarant que cet éminent géomètre tient incontestablement la première place parmi tous ceux qui ont étudié le sujet.

L'ouvrage de M. Brocard était un dictionnaire où les courbes avaient leurs noms rangés par ordre alphabétique; celui de M. Loria en diffère à ce point de vue. Ici les courbes sont groupées géométriquement, en commençant tout d'abord par les courbes algébriques de degré inférieur.

On y passe rapidement sur la droite et les coniques, car ces lignes sont bien étudiées dans tous les ouvrages élémentaires. Quelques mots historiques et philosophiques sur l'impossibilité de nettement définir la droite sont cependant très intéressants. Quant aux coniques, admirablement étudiées par les Grecs et cependant complètement délaissées par le Moyen Age, leur étude fut, pour ainsi dire, l'origine de toutes les méthodes de la géométrie moderne.

L'ouvrage commence véritablement par l'étude des courbes du troisième degré.

L'auteur part d'un point de vue très général et remarque que l'étude peut se présenter sous trois aspects différents. Ou bien on étudiera les cubiques d'après la manière de les construire géométriquement, ou bien on partira de la configuration de leurs points singuliers, ou enfin du célèbre théorème de Salmon, relatif à la constance du rapport anharmonique de quatre tangentes menées à la courbe par l'un de ses propres points supposé non singulier.

En partant notamment de la configuration des points singuliers, on arrive facilement à montrer que toute courbe du troisième degré peut toujours se représenter par une équation de la forme

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

puis, sur la forme paramétrique, au moyen de fonctions elliptiques très simples d'un paramètre.

Signalons aussi la possibilité de transformer une cubique quelconque en une cubique à centre par une transformation projective.

Après ces généralités, nous voyons les classifications de cubiques tentées dans le passé et notamment la riche et poétique liste qu'en fit Newton en empruntant presque tous les noms à la botanique et à l'architecture, mais la première classe véritablement délimitée de façon méthodique que M. Loria nous présente est celle des cubiques rationnelles, c'est-à-dire de celles qui sont paramétriquement définies par des équations de la forme

$$\rho x_i = a_{i0}\lambda^3 + a_{i1}\lambda^2 + a_{i2}\lambda + a_{i3}, \ (i = 1,2,3.)$$

puis immédiatement ensuite les cubiques circulaires, c'est-à-dire celles qui passent par les points ombilicaux. Le chapitre suivant étudie la cissoïde de Dioclès

$$x\,(x^2 + y^2) = 2ry^2$$

qui, comme cette équation le montre immédiatement, est précisément une cubique circulaire.

On connaît les rapports remarquables de la cissoïde et de la parabole. Signalons aussi d'élégantes et fort simples quadratures qui nous donnent de très remarquables théorèmes : Si, par exemple, la cissoïde est engendrée à l'aide d'un cercle de la façon élémentaire bien connue, l'aire comprise entre la branche à point de rebroussement et l'asymptote est égale à trois fois celle du cercle générateur et le volume engendré par cette aire tournant autour de l'asymptote est égal à celui du tore engendré par le cercle précédent.

Signalons aussi la rectification de la courbe et le fait que la différence de sa longueur totale et de celle de l'asymptote est une quantité finie.

Nous voyons ensuite les généralisations de la cissoïde, puis les courbes connues sous le nom de parabole et de folium de Descartes, la première de de ces deux n'ayant pas grande importance, mais la seconde en ayant, au contraire, une très grande, surtout au point de vue historique.

L'analogie de forme du folium et de la strophoïde nous conduit à l'étude de cette dernière courbe qui peut rentrer comme la cissoïde dans la classe des cubiques circulaires. Elle possède un point double où les tangentes sont rectangulaires. Elle est comme la cissoïde susceptible de certaines généralisations.

La conchoïde de Sluse est aussi une cubique circulaire; elle possède une asymptote et deux points d'inflexion à distance finie. Le lieu de ces points pour l'ensemble des conchoïdes que l'on peut construire avec la même asymptote et le même pôle est une cissoïde de Dioclès.

La versiera est une cubique rationnelle dont l'équation peut s'écrire :

$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2},$$

la visiera est encore une cubique circulaire et ces deux courbes comprennent, elles aussi, entre elles et leurs asymptotes des aires en rapport très simple avec celui d'un certain cercle générateur de la courbe.

Voici encore la trisectrice de Maclaurin, puis celle de Catalan qui est la podaire négative d'une parabole, par rapport à son foyer, puis celle de de Longchamps qui, exception faite pour cette dernière, sont encore des cubiques circulaires.

Après les trisectrices viennent les duplicatrices et les feuilles paraboliques représentées par des équations de la forme

$$x^3 = a\,(x^2 - y^2) + bxy,$$

ce qui termine la partie consacrée aux courbes du troisième ordre.

On voit déjà par ce qui précède que l'ouvrage de M. Loria est loin de ressembler à quelque sèche nomenclature; à côté du souci de rappeler toutes les courbes considérées et nommées par les géomètres, on sent celui non moins sérieux de ne pas faire un exposé disparate et de relier par la géométrie analytique et le calcul intégral les propriétés les plus belles de ces courbes.

La place limitée dont nous pouvons disposer dans ce journal ne nous permet pas de continuer avec autant de détails l'analyse des autres sections de l'ouvrage. Bornons-nous à décrire rapidement leur plan. Voici 124 pages consacrées aux courbes du quatrième ordre. La classification de ces courbes

est exposée avec concision. Celles qui se présentent le plus naturellement sont celles qui ont leur maximum de points doubles et que des constructions simples permettent de faire dériver des coniques. Nous considérons ensuite celles qui ont deux points doubles sur la droite de l'infini; ce sont les quartiques elliptiques; si ces deux points sont les points ombilicaux, nous obtenons les quartiques bicirculaires, telles, par exemple, que les sphériques de Perseus Ces dernières courbes sont de grande importance; elles comprennent les lignes isoptiques des coniques, les lemniscates, les ovales de Cassini.

Comme quartique simplement circulaire, nous considérons la conchoïde rectiligne de Nicomède à laquelle un chapitre est spécialement consacré, puis les généralisations de cette courbe, et notamment la conchoïde à base circulaire qui nous mène naturellement à la cardioïde. Après celle-ci, voici l'hypo-cycloïde triangulaire, merveilleuse entre toutes, et un chapitre spécial consacré à l'étude de ses podaires. Signalons aussi les ovales de Descartes, remarquables quant à leurs propriétés focales et les courbes dites polyzomales définies par des équations de la forme

$$\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2} + \sqrt{f_3} = 0$$

les f étant des premiers membres d'équation de coniques; ensuite les quartiques possédant un point double à tangentes confondues, telle que celle qui ressemble au $\varkappa$ grec et porte pour cette raison le nom de cette lettre; les courbes de Cassini, quartiques bicirculaires nées d'un problème d'astronomie; les quartiques dont les points singuliers sont des points d'inflexion, tels que la lemniscate de Bernoulli. Cette importante section se termine par l'étude de la courbe nommée *Muschellinie* (ligne en coquille) par Dürer, laquelle est encore rationnelle et simplement circulaire, par la trisécante qui est dans le même cas, et enfin par quelques généralités sur les quartiques considérées comme lieux géométriques attachés à de certaines coniques.

Dans une quatrième section, nous étudions des courbes de degré supérieur au quatrième. Cette étude est certainement plus restreinte que les précédentes, car, comme le remarque l'auteur, les courbes du troisième ordre forment un territoire bien défini dans l'empire mathématique, celle du quatrième un domaine dont certaines frontières sont encore imprécises, et, quant à celles de degré supérieur, quelque chose comme un pays dont quelques rares routes seulement sont tracées, cela en dépit d'efforts d'éminents géomètres comme M. Brocard, qui ont surtout trouvé, comme courbes remarquables du cinquième ordre, celles qui se rattachaient à des problèmes posés sur les coniques.

Voici, d'autre part, l'astroïde (hypocycloïde à quatre rebroussements réels) et la scarabée, la courbe de Watt, issue de considérations cinématiques, la néphroïde, sextique bicirculaire, l'atriphtaloïde qui est dans le même cas et qui est née de la considération d'une surface des mers simplifiée par quelques abstractions. Signalons encore parmi les sextiques le trifolium pratense; la section se termine par l'étude sommaire de courbes du neuvième et du vingt-cinquième ordre, issues de considérations relatives à la théorie des fonctions d'une variable complexe.

La cinquième section du livre est consacrée à des courbes algébriques spéciales qui, par exemple, ne sont pas forcément d'un degré déterminé.

Elles sont surtout nées de courbes de faible degré dont on veut généraliser et élever le degré de l'équation en conservant cependant la forme de celle-ci. Telles sont, par exemple, la parabole et les hyperboles généralisées

$$y^n = p^{n-1}\, x \quad , \quad x^n y^p = a^{n+p} \, .$$

les courbes dites « perles »

$$x^s (a \pm x)^r = \frac{a^{r+s}}{b^p}\, y^p$$

qui, pour $s = 1$, $r = 1$, $p = 2$ sont des coniques rapportées à un axe et à la tangente en un sommet, les courbes de Lamé

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1 \, ,$$

les courbes polyzomales dont il a déjà été question plus haut dans un cas particulier.

Signalons encore les courbes de Darboux présentant des propriétés imitées de celles de la parabole et de ses tangentes et celles de Serret dont les asymptotes passent toutes par un même point en y faisant des angles égaux. Si ces angles sont droits on retrouve l'hyperbole équilatère.

Nous ne pouvons que signaler les élégantes rosaces et plus généralement les feuilles géométriques dont les noms viennent de comparaisons botaniques, les ovales, les courbes triangulaires et toutes les courbes nées du problème du partage de l'angle en parties égales. Voici un chapitre intéressant et très général sur les courbes possédant un centre ou un axe de symétrie, un autre sur les courbes qu'une transformation géométrique déterminée change en elles-mêmes (courbes antipolaires, anallagmatiques, etc...).

Sous le titre de géométrie des polynômes, nous étudions maintenant spécialement les courbes dont les équations s'obtiennent en égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire d'un polynôme de variable complexe. On sait qu'il y a là un moyen général d'obtenir des familles de courbes orthogonales.

L'important problème de la rectification des courbes nous conduit ensuite à considérer celles qui sont rectifiables au moyen d'arcs de courbes simples, notamment par arcs de parabole, de cercle, d'hyperboles, d'ellipses (courbes de Serret), de lemniscates (courbes qui conduisent notamment aux spirales sinussoïdes). Nous terminons avec les courbes de Lissajou, nées cinématiquement de la combinaison de deux mouvements harmoniques et obtenues expérimentalement en acoustique par une méthode optique bien connue.

Nous quittons alors les courbes algébriques et pénétrons dans la sixième section consacrée aux courbes transcendantes. L'intégration d'équations différentielles d'une extrême simplicité conduit à de telles courbes et M. Loria montre rapidement que quelques considérations relatives à cette voie pourraient permettre un essai de classification. Beaucoup de ces courbes sont nées aussi de considérations géométriques spéciales et voici, par exemple, le problème de la quadrature du cercle qui en fait naître de très intéressantes, dites quadratrices.

Passons rapidement sur les courbes transcendantes les plus connues, telles que les spirales algébriques et transcendantes, la clothoïde, dont le rayon de courbure est inversement proportionnel à l arc, toutes les roulettes ; signalons les pseudocycloïdes moins connues et que l'on déduit des véritables roulettes en donnant des valeurs imaginaires à certains paramètres constants, les courbes de Delaunay et Sturm qui sont des roulettes d'ellipses, les courbes syntrépentes et isotrépentes, nées de considérations cinématiques et propres, en effet, à transformer un mouvement circulaire en divers mouvements non uniformes, les courbes de Debeaune, nées d'un problème posé par ce géomètre à Descartes, les courbes de Ribaucour dont le rayon de courbure est proportionnel à la normale, les courbes de Norwich ou de Sturm et celles d'Euler dont le rayon de courbure est proportionnel au rayon vecteur.

Signalons encore les courbes trigonométriques $y = \sin x$, $\operatorname{tang} x$, etc..., la courbe logarithmique et leurs généralisations dites courbes hypertrigonométriques et courbes hypergéométriques. Sous le nom de courbes extraordinaires, M. Loria a rassemblé la courbe sans tangente de Weierstrass, les courbes qui remplissent une aire, celles dans l'équation desquelles figurent des fonctions numériques, etc...

Un très intéressant chapitre est consacré aux courbes de Klein et Lie dont l'équation en coordonnées homogènes est de la forme $x^a y^b z^c =$ constante. Nous voyons ensuite les courbes qui, sur une carte de Mercator, représentent les sections planes de la sphère.

L'étude des courbes transcendantes se termine par celles de ces courbes qui sont liées à des questions de statique, de physique mathématique, etc... Voici les tractrices, les chaînettes, les courbes élastiques, les polhodie et herpolhodie et différentes autres, telles que les courbes magnétiques.

La septième et dernière section de l'ouvrage est consacrée aux courbes dérivées de courbes primitivement connues, au moyen de certaines transformations, telles, par exemple, que celles que l'on obtiendrait en partant d'une même équation entre deux variables, en convenant que ces variables peuvent être tour à tour coordonnées cartésiennes, tangentielles, polaires, etc...

Signalons ensuite les courbes de poursuite, les développées, développantes et leurs généralisations, les courbes parallèles, les courbes radiales, lieux des extrémités d'un segment issu d'un point fixe et équipollent au rayon de courbure d'une courbe donnée, les caustiques, les podaires et antipodaires, les courbes isoptiques des points desquelles on voit une courbe donnée sous un angle donné et, comme cas particulièrement intéressant, les cou bes orthoptiques.

Voici, de plus, les courbes différentielles et intégrales d'une courbe donnée $y = f(x)$ dont les équations s'obtiennent en remplaçant $f(x)$ dans la précédente, soit par la fonction dérivée, soit, au contraire, par la fonction primitive.

Signalons encore les *anticourbes (Gegencurven)* qui s'obtiennent quand on fait correspondre à un point (x, y) d'une courbe quelconque l'autre point d'intersection de deux cercles passant au point (x, y) et admettant respectivement pour centres les pieds des coordonnées x et y sur les axes.

Le dernier chapitre est consacré aux courbes dérivées d'un groupe de plusieurs courbes, par exemple celles dont l'ordonnée est une fonction donnée des ordonnées d'autres courbes.

Après ce dernier chapitre, l'auteur a ajouté quelques notes et notamment

une postface étendue et prodigieusement intéressante au point de vue historique et philosophique. Il y fait remarqner que, contrairement à ce que l'on pourrait croire au premier abord, les courbes transcendantes ne forment pas un ensemble beaucoup plus confus que les courbes algébriques et que beaucoup d'entr'elles, et notamment les plus connues, sont telles que le coefficient angulaire y' de la tangente s'exprime algébriquement en fonction des coordonnées x, y. On peut nommer *panalgébriques* les courbes de cette nature.

La longue analyse qui précède est incomplète et la décuplerait-on que ce défaut ne disparaîtrait pas, car dans un livre comme celui de M. Loria, chaque page appelle une réflexion; nous l'aurons, du moins, signalé comme un recueil d'une prodigieuse richesse et d'une admirable variété.

A. Buhl (Montpellier).

Galdeano (Dr. Zoel. G. de). — **Tratado de Análisis Matemático**; tomo primero: **Cálculo differencial.** (Nueva Enciclopedia matemática) — t. IV. 1 vol. in 8° (XII - 270 p.); Prix : 5 pesetas; Zaragoza, Casañal. 1904.

Le présent Ouvrage constitue le tome IV d'une Encyclopédie mathématique dont Mr de Galdeano a entrepris la publication. Dans sa préface, le savant professeur de l'Université de Saragosse se plaint avec amertume de la décadence lamentable de l'Enseignement supérieur en Espagne sous l'influence de programmes arriérés. Ceux-ci, dit-il, semblent dater de l'époque glorieuse, mais déjà bien lointaine, de Lagrange, de Lacroix et de Sturm. Tous les progrès modernes, réalisés à l'Etranger, en ont été soigneusement exclus. Mr de Galdeano proteste, avec éloquence, contre un pareil état de choses, si néfaste à l'avenir scientifique de sa patrie. Et, il se propose de réagir, dans la mesure du possible, en faisant paraître ce manuel de Calcul différentiel première partie d'un Traité complet d'Analyse.

En effet, l'Auteur s'est efforcé, dans ce petit volume, d'introduire, sous une forme très élémentaire, les principes les plus essentiels de la théorie actuelle des fonctions d'une variable réelle. C'est ainsi que, dès le début, après avoir parlé des nombres irrationnels, il donne des notions très claires sur les ensembles. La même préoccupation de rigueur et de simplicité se constate à propos des infiniment petits (*triangles infinitésimaux*), des séries, des dérivées (*dérivées des fonctions implicites — déterminants fonctionnels*) qui donnent lieu à autant de chapitres spéciaux. Puis, viennent les changements de variables, l'élimination des constantes et les fonctions arbitraires, le calcul des différences, et, enfin, quelques mots sur la recherche des fonctions primitives. Tous ces sujets sont accompagnés de nombreux exemples ou exercices, fort heureusement choisis.

La seconde partie du volume de Mr de Galdeano est consacrée aux applications analytiques du Calcul différentiel (*formule de Taylor — réversibilité des séries, — formule de Moivre et conséquences. — Fonctions hyperboliques. — Séries de Laplace et de Lagrange. — Décomposition des fractions algébriques. — Expressions indéterminées. Maximums et minimums*). On retrouve, dans l'exposé de ces diverses questions, les qualités d'élégance et de précision qui caractérisent le talent de Mr de Galdeano. Elles contribueront, nous l'espérons, non seulement au succès de son œuvre, mais encore à la réalisation des idées qui lui sont chères, pour le plus grand bien de l'Enseignement universitaire de son pays. M. Godefroy (Marseille).