Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 7 (1905)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA LOI DES GRANDS NOMBRES
Autor: De Montessus, R.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-8426

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LA LOI DES GRANDS NOMBRES

Pour la plupart, les idées philosophiques prêtent à discussion, donc au doute. Le mathématicien, lui, exclut le doute et nous verrons par quels procédés. Il construit une science logique, adéquate à la réalité jusqu'à preuve contraire, et de cette tour d'ivoire il descend, si nécessaire, mais par occasion seulement, à la réalité. Il se garde alors de conserver la belle assurance qui, tout à l'heure, l'élevait au-dessus du monde fuyant des contingences. Deux hommes sont en lui et des deux le logicien l'emporte.

Plus conséquent avec lui-même, le philosophe veut établir l'équilibre entre les deux hommes et, pour le faire, il tente de pénétrer l'inconnaissable. Nous ne le suivrons pas ici dans les tentatives qu'il a faites pour expliquer le HASARD; nous ne nous poserons pas avec lui ces questions: le hasard existe-t-il? qu'est-ce que le hasard? Nous tenterons seulement d'édifier avec le mathématicien une théorie purement logique du hasard et de conclure à la valeur morale de cette théorie.

Conséquence ou non de l'éducation, l'esprit cherche instinctivement la cause de tout événement: pas d'effet sans cause, dit l'adage, et au cas où deux événements se rencontrent sans que la cause de cette rencontre apparaisse, il y aura *hasard*. Pour certains esprits, le mot hasard est donc synonyme de « cause inconnue », mais existante: si nous connaissions parfaitement les lois qui régissent l'univers, disent-ils, le hasard ne serait plus qu'un mot. C'est fonder la philosophie sur un *déterminisme* incompatible avec le *libre arbitre*, car, dans l'ordre physique, le libre arbitre supprime la relation de cause à effet. Je ne veux pas dire cependant

que le libre arbitre soit l'unique loi du monde créé. Je ne conçois pas l'univers non régi par des lois. Mais on peut admettre que le libre arbitre soit le fait d'un choix possible entre plusieurs modes d'action définis au moins négativement — je puis aller de mille moyens différents de Paris à Versailles, je ne puis y aller par la poste — et laisser place ainsi au déterminisme. Dans ce déterminisme mitigé, la relation de cause à effet tient pour une part du libre arbitre et ne saurait plus, en conséquence, être constamment réduite en formules. Nul esprit, si puissant fût-il, ne pourrait dès lors conclure en toute circonstance de cause à effet ; tout au plus lui serait-il loisible de définir les effets possibles d'une cause donnée et de poser des inégalités, non des égalités, selon le langage des physiciens de l'Ecole moderne.

Pour d'autres le *hasard* est le résultat d'un concours de circonstances étrangères les unes aux autres....

J'en passe : il n'empêche que le mot hasard ne corresponde à un *sentiment* bien défini et que plusieurs *définitions* correspondant au *sentiment de hasard* soient également possibles : et je veux simplement remarquer ici que *les unes et les autres sont indifférentes au* MATHÉMATICIEN, me réservant de reprendre et de développer dans la suite la théorie *philosophique* du hasard.

Le mathématicien, disions-nous, exclut le doute et il y parvient en construisant une science logique, algorithme plus ou moins parfait de la réalité. Que fera-t-il au sujet du hasard ?

J'ai besoin d'un point de comparaison.

Il est en mécanique rationnelle une notion qui a torturé bien des esprits : la notion de force.

Qu'est-ce qu'une force ?

Pour le philosophe stoïcien, la force est le principe universel des choses. Pour Büchner, la force est un attribut de de la matière. Spencer pense que la force est le principe indéfinissable qui, dans son évolution, produit tous les phénomènes de l'univers.

Ces conceptions métaphysiques n'offrent aucune prise à l'analyste. Aussi nous voyons Aristote, Archimède, Léonard

de Vinci et leurs successeurs immédiats fonder la Mécanique sur l'idée de *poids* qui, dérivée de l'idée de force, mais non adéquate à celle-ci, est du moins précise et féconde. Bientôt apparaît en Stévin l'idée du principe que nous appelons le « parallélogramme des forces », principe que Newton énonce enfin explicitement.

On connaît désormais une propriété fondamentale de la force. Quelle est, *sur l'idée de force,* l'influence de cette découverte ? que devient avec lui la notion de force ? Bernoulli tient le parallélogramme pour une vérité géométrique. Il en donne une démonstration *géométrique.* Toutefois, sa démonstration suppose *implicitement:* 1° que l'intensité et la direction de la force sont les causes déterminantes de son action ; 2° que plusieurs forces appliquées en un même point ont une résultante ; 3° que les forces considérées n'ont aucune influence les unes sur les autres, *propriétés qu'il faudrait tout d'abord établir.* Bernoulli préjuge donc de la nature de la force et, en fait, il se réfère à cette idée du temps que la force peut être assimilée à une traction qui, en toute circonstance, peut être remplacée par la traction que produirait un poids. »

Varignon, au contraire, remarque que les forces sont proportionnelles aux mouvements qu'elles produisent en des temps égaux et, définissant la force comme la *cause du mouvement*, il déduit la composition des forces de la composition des mouvements.

Voici que les idées se précisent. Désormais, le parallélogramme est un *principe d'expérience* en ce qui regarde les « tractions » ; que l'expérience soit directe ou qu'elle soit basée sur des expériences antérieures, telles que « l'indépendance des effets de tractions », il n'importe. Or le parallélogramme est une conséquence logique de cette autre expérience ; que les tractions sont proportionnelles aux accélérations qu'elles produisent. Nous définirons donc la force, généralisation de l'idée de traction, comme « la cause du mouvement » et nous justifierons cette définition en montrant que le principe du parallélogramme en est une conséquence.

Nous sommes partis d'un fait d'expérience, plutôt médiate qu'immédiate, il n'importe — le parallélogramme — et nous avons posé une définition qui en tient lieu.

Cette définition complète le principe et, féconde de sa nature, elle dépasse le principe. Elle permet en effet d'étudier des forces qui ne sont plus assimilables à des poids ou plutôt de faire abstraction de l'idée de poids.

Cette définition a cependant à sa base un point faible. Qu'est-ce qu'une cause ? que veut dire : la cause d'un mouvement ? Parler de la *cause* d'un mouvement nous renseigne-t-il sur ce mouvement ? Il semble bien que non. En fait, le mouvement nous est accessible, mais la cause du mouvement nous est cachée.

Aussi bien, dernier stade, *perdant de vue l'idée concrète de force et n'en retenant que le concept abstrait*, le géomètre définira la force qui produit un mouvement par l'accélération qu'il observe dans ce mouvement. Désormais, l'étude de la force sera conjointe à l'étude du mouvement, rien ne distinguera la force du mouvement.

Est-ce à dire que la mécanique est une science formelle et, par là, vaine ? Non.

J'ai défini une force par l'accélération du mouvement qu'elle produit et cette définition, excluant la métaphysique des considérations mathématiques, me permet d'édifier un système logique. Ce système est adéquat à la réalité pour autant que la définition de la force l'est et, si nécessaire, je passe sans effort de l'algorithme à la réalité.

La Mécanique est un schéma approximatif, mais logique de la réalité. Ce n'est donc pas une science *purement* formelle.

Ne suis-je pas résolu d'ailleurs à modifier l'algorithme qui représente l'insaisissable réalité, dès que le miroir déforme l'image ? La physique nous offre des exemples connus de ces modifications et si le jour est proche où la Mécanique rationnelle sera profondément remaniée, c'est que cette science s'éloigne en de trop nombreux points de la réalité.

J'ai retracé à grands traits l'histoire de la Mécanique, mon-

tré comment cette science se séparant peu à peu de la métaphysique est devenue science logique.

C'est l'histoire de toute science exacte et demain ce sera l'histoire du CALCUL DES PROBABILITÉS qui, lui, est encore discuté.

Il peut paraître étrange de vouloir codifier le *probable* et le ramener, dans une certaine mesure, au *certain*. Tel est cependant l'objet du *Calcul des probabililés*.

Voici un stratégiste en campagne. Il sait qu'il a devant lui un corps de l'armée ennemie et ses espions lui ont rapporté que le corps est cantonné à tel endroit. Il déploie sa carte, il étudie le terrain. L'ennemi a pour objet la ville qui s'étend vers la gauche, mais il en est séparé par un fleuve. Ici, cependant, est un gué, tandis qu'un peu plus bas les rives sont resserrées au point qu'on y peut jeter un pont volant. Quel point de passage choisira l'ennemi ? Quelle est la *probabilité* qu'il essayera de jeter un pont et non pas de franchir le gué ?

Tous les jours nous avons à résoudre des problèmes de ce genre et, d'ordinaire, nous nous décidons *au petit bonheur*. C'est ainsi qu'on remplace le tracé exact des dents d'un engrenage par un tracé approximatif, plus facile à établir.

Il est des cas, cependant, où il est possible de faire le calcul avec précision, de peser toutes les chances favorables et toutes les chances contraires, en un mot de *calculer une probabilité*. Les jeux de hasard, par exemple, se prêtent à ce calcul. Si l'on me promet dix francs chaque fois que je tirerai un roi d'un jeu de 32 cartes et qu'on ne me demande qu'un franc quand il sortira une autre carte, j'ai intérêt à souscrire aux conditions posées.

En effet, sur les 32 cartes, 4 sont des rois. J'ai donc 1 chance *sur* 8, une chance *contre* 7, de tirer un roi. On devrait donc, dans un jeu équitable, où les mises sont proportionnelles aux chances, me donner 7 francs et non pas 10 et si je joue *longtemps* à ce jeu je gagnerai : j'en suis sûr. Aujourd'hui, peut-être, perdrai-je, demain aussi, cette semaine encore. Mais dans un an, deux ans, j'aurai un bénéfice assuré. Nul ne sau-

rait contredire cette constatation, car c'est une constatation. Nous savons tous, *par expérience,* que la balance penche du côté où les chances sont les plus nombreuses.

Un examen attentif montre même de quel angle penche la balance. Dans le jeu précité je gagnerai, en moyenne, les $\frac{3}{8}$ des sommes totales que j'aurai jouées. Sur 32 coups, en effet, je gagnerai *en moyenne* 4 fois et je perdrai en moyenne 28 fois. Sur 32 coups, je paierai donc 28 francs, mais on me paiera 10×4 ou 40 francs ; j'aurai donc comme bénéfice *moyen* les $\frac{12}{32}$ ou les $\frac{3}{8}$ des 32 francs engagés et la loi étant évidemment générale, mon bénéfice *moyen* sera les $\frac{3}{8}$ de la somme totale engagée.

Je prends un livre où se trouvent des tables numériques, des statistiques, par exemple ; tel est l'Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'an 1903. A la page 438, est indiquée la superficie des arrondissements de France. La colonne de gauche ne renferme que les chiffres 0, 1, 2 : ces chiffres ne ressortissent donc pas du pur hasard. Le souci de former des divisions administratives d'étendues à peu près égales a fait que les arrondissements ont été limités à 300,000 hectares environ. La colonne qui suit, au contraire, renferme tous les chiffres de 0 à 10, mais j'admets, pour m'assurer un résultat exact, que ces chiffres sont, comme les précédents, soumis à une certaine loi, conséquence de la première.

D'autre part, dans les chiffres des unités, peuvent figurer certaines erreurs systématiques provenant des *équations personnelles* aux statisticiens, car ces chiffres ne sont qu'approximatifs et, pour la plupart, s'éloignent de la réalité. On le comprendra par la comparaison aux chiffres des unités relatifs à la Population. Chacun sait que les recensements ne se font que par à peu près et que les petites erreurs y sont fréquentes. Ces erreurs ne portent que sur des nombres peu élevés, mais enfin elles laissent place à l'équation personnelle relative à chacun des individus chargés du recensement, par exemple à la manie de tel ou tel d'*arrondir* les nombres.

Des chiffres donnés par l'Annuaire, je retiens donc seule-

ment comme soumis au pur hasard, ceux des dizaines, centaines, mille, dizaines de mille.

A priori, combien de ces chiffres seront pairs (0, 2, 4, 6, 8) *et combien seront impairs* (1, 3, 5, 7, 9) *ou, plutôt, quel sera le rapport du nombre des chiffres pairs au nombre des chiffres impairs ?*

Je ne crois pas m'avancer beaucoup en disant que pour tout esprit non prévenu — il semble que discuter le sujet l'obscurcisse parfois — ce rapport sera, à peu de chose près, 1, car je ne vois pas de raison pour que les chiffres pairs soient plus nombreux que les chiffres impairs. Il y aura cependant quelque différence de l'un à l'autre et, pour ce motif, le rapport ne sera pas exactement 1.

Cette idée que je prête à un esprit non prévenu lui vient d'une expérience de tous les jours. Il a pu constater, par exemple, que s'il jouait tous les jours la même somme avec des joueurs de la même force que lui, la perte d'un jour était compensée par le gain du lendemain ; qu'au jeu de roulette, la rouge sort à peu près aussi souvent que la noire ; que s'il marque habituellement la page de son livre de lecture, le chiffre en est tantôt pair, tantôt impair.... Il serait peut-être nécessaire de compter les chiffres de la statistique des superficies et de calculer le rapport que nous estimons devoir s'écarter peu de 1.... ce décompte n'a pas été fait. Je doute qu'on le fasse. Au fond je suis persuadé que le résultat serait celui que j'annonce et je suis même persuadé que le rapport du nombre des chiffres 3 au nombre total des chiffres serait environ $\frac{1}{10}$.

On a voulu compter des chiffres soi-disant pris au hasard : ceux qui interviennent dans les logarithmes et même ceux qui donnent l'expression approchée du nombre π. *Ces chiffres ne sont pas pris au hasard.* D'une part, la différence d'un logarithme à un autre est constante dans une échelle assez étendue, d'autre part, les chiffres qu'on rencontre dans le développement de π peuvent être soumis à une loi, puisque leur ensemble représente le rapport de la circonférence à son diamètre.

Que je compte ou non les chiffres de mon annuaire reconnus comme procédant du seul hasard, me voici, je suppose, persuadé que le rapport du nombre des chiffres pairs au nombre des chiffres impairs est à peu près 1, que le rapport du nombre des chiffres 3 au nombre total des chiffres est environ $\frac{1}{10}$. La question de cet *à peu près*, de cet *environ*, ne vient-elle pas dès lors se poser et son intérêt ne prime-t-il pas ? Sans doute. Et comment la résoudre ? Le principe de raison suffisante m'en donnera-t-il la solution ? Je n'oserais l'affirmer. Qu'on en juge.

La différence entre l'unité et le rapport du nombre des chiffres pairs au nombre des chiffres impairs décroît et tend vers zéro à mesure que croît le nombre des chiffres décomptés. De même, la différence entre la fraction $\frac{1}{10}$ *et le rapport du nombre des chiffres 3 au nombre total des chiffres décroît et tend vers zéro à mesure que croît le nombre des chiffres décomptés. Il y aura des exceptions à la règle, mais la règle s'affirmera dans le plus grand nombre des cas.* Telle est la règle, règle que nous regarderons comme un principe d'expérience, au moins médiate, comme procédant d'une *induction* savante, basée sur l'expérience, comme un *fait*, analogue au principe du parallélogramme.

Que je vérifie d'ailleurs la règle sur 10, 100, 1000... suites de chiffres, pourrai-je l'affirmer *sans induction ?* non, sans doute. Sans induction, je ne puis inférer du particulier au général, puisque, seul, le particulier est susceptible d'expériences. Sans induction, je n'aurais pu affirmer que si 10, 20, 50 « ronds » paraisssent jouir de cette propriété qu'ils ont même courbure en chacun de leurs points, *tous* les ronds ont partout même courbure. Si je vérifie qu'un cheval hâlant un bateau exerce un effort proportionnel au cosinus de l'angle que fait le câble avec l'axe du bateau, ce qui n'est qu'une manière d'énoncer le principe du parallélogramme, je ne puis non plus sans induction passer de là au principe *général* du parallélogramme. Ainsi du calcul des Probabilités.

Désormais, nous possédons une base d'opérations et le raisonnement logique va intervenir.

Je considère des événements *contradictoires* E_1, E_2, E_3, et je sais qu'il n'y a pas de raisons pour que l'un se produise plutôt que l'autre dans telle ou telle expérience. Que deviendra le principe relativement à ces événements ?

Faisant d'abord abstraction des événements E_3, qui n'influent pas sur les événements E_2, je sais, d'après le principe énoncé, que la différence entre l'unité et le rapport du nombre des arrivées des événements E_2 au nombre des arrivées des événements E_1 tend vers zéro. De même, la différence entre l'unité et le rapport du nombre des événements E_3 au nombre des événements E_1 tend vers zéro. Donc la différence entre deux fois l'unité et le rapport du nombre des arrivées des événements E_2 et E_3 au nombre des événements E_1 tend vers zéro et la différence entre 3 fois l'unité et le rapport entre du nombre total des événements au nombre d'arrivées de l'événement E_1 tend vers 1. Autrement dit, si les nombres d'arrivées des événements E_1, E_2, E_3, sont respectivement l_1, l_2, l_3 de ce que $1 - \frac{l_2}{l_1}$, $1 - \frac{l_3}{l_1}$ tendent vers zéro, je conclus que $2 - \frac{l_2 + l_3}{l_1}$ ou $3 - \frac{l_1 + l_2 + l_3}{l_1}$ tend aussi vers zéro et enfin que $\frac{l_1}{l_1 + l_2 + l_3}$ tend vers $\frac{1}{3}$; *le rapport du nombre des arrivées de l'événement* E_1 *au nombre total des événements tend vers* $\frac{1}{3}$. Nous sommes donc *logiquement* en mesure de donner au principe énoncé l'extension que voici : *Si des événements contradictoires* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *sont en présence et s'il n'y a pas de raison pour que l'un se produise plus souvent que l'autre, le rapport, dans un nombre donné d'épreuves, du nombre d'arrivées de l'un quelconque d'entre eux au nombre total des événements différera d'autant moins de la fraction* $\frac{1}{n}$ *que le nombre d'épreuves sera plus considérable.*

Cette proposition est connue sous le nom de LOI DES GRANDS NOMBRES. Elle a fait l'admiration des poètes qui ont voulu y voir une « loi immuable de la nature. » Elle a fait le désespoir des géomètres, qui ont voulu la démontrer *à priori*. Nous savons désormais qu'elle est un PRINCIPE D'EXPÉ-

RIENCE, c'est-à-dire un principe que l'induction déduit de quelques expériences particulières.

Nous ne sommes pas au terme. Le principe souffre une dernière extension *logique : Etant donné des événements contradictoires* E_1, E_2,..., E_n, *si les événements* E_1 *peuvent être partagés en classes* E_{11} E_{12},..., E_{1p} *contradictoires et ayant égale chance de se produire, si les événements* E_2 *peuvent à leur tour être partagés en classes* E_{21}, E_{22},..., E_{2q} *contradictoires aussi et ayant égales chances encore de se produire, et ainsi des autres, les événements* E_n *se partageant en classes* E_{n1}, E_{n2},..., E_{ns} *de même nature, si, de plus, les événements partiels* E_{11}, E_{12},.., E_{1p}, E_{21}, E_{22},..., E_{2q},... E_{n1}, E_{n2},... E_{ns}, *qui sont contradictoires, ont égales chances de se produire, le rapport dans un nombre donné d'épreuves du nombre d'arrivées de l'événement* E_1 *au nombre total des événements différera d'autant moins de la fraction* $\frac{p}{p+q+\ldots+s}$ *que le nombre des épreuves sera plus grand et ainsi des autres événements* E_2, E_3,.., E_n *pour lesquels il faudra considérer les rapports* $\frac{q}{p+q+\ldots+s}$, ..., $\frac{n}{p+q+\ldots+s}$.

L'étude du problème que voici nous servira de démonstration. On lance deux dés sur une table. On peut amener ainsi les points 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Combien de fois sortira, *en moyenne* le point 8 ? vers quel nombre tendra le rapport du nombre d'arrivées du point 8 au nombre de coups joués ?

L'événement E_8, c'est-à-dire la sortie du point 8 se décompose en les événements E_{81}, sortie des points 2 et 6, E_{82}, points 3 et 5, E_{83}, points 4 et 4, E_{84}, points 5 et 3, E_{85}, points 6 et 2 ; on trouve ainsi 1 événement E_1, 2 événements E_3, 3 événements E_4, 4 événements E_5, 5 événements E_6, 6 événements E_7, 5 événements E_8, 4 événements E_9, 3 événements E_{10}, 2 événements E_{11}, 1 événement E_{12}, soit, en tout, 36 événements partiels également possibles. Le point 8 sortira donc, en moyenne, $\frac{5}{36}$ fois.

Nous sommes en possession du *principe*, principe d'expé-

rience. Ce n'est qu'au prix de vingt ans de réflexion que Jean Bernoulli le mit au jour. Nul ne saurait donc d'un coup s'élever à sa hauteur. Regardons le principe comme une vérité que tout jusqu'ici a tendu à confirmer et préoccupons-nous de fonder sur cette base le Calcul des Probabilités. Posons à cet effet une définition *renfermant le principe*.

Je remarque que sur les $p+q+\ldots+s$ événements contradictoires, mais également possibles E_{11}, $E_{12}, \ldots$, E_{1p}, E_{21}, $E_{22}, \ldots$, $E_{2q}, \ldots$, E_{n1}, $E_{n2}, \ldots$, E_{ns}, P sont favorables à E_1 : ce sont les événements E_{11}, $E_{12}, \ldots$, E_{1q} ; en sorte que le rapport $\frac{p}{p+q+\ldots+s}$ est *le rapport du nombre p des événements favorables à* E_1 *au nombre total* $p+q+\ldots+s$ *des événements différents qui peuvent se produire*. Je puis donc énoncer comme il suit la *loi des grands nombres : le rapport du nombre d'arrivées de l'événement* E_1 *au nombre total d'épreuves tend*, si le nombre des épreuves croît, *vers le rapport du nombre des cas favorables à* E_1 *au nombre des cas possibles*.

Sur N épreuves, l'événement E_1 devant se produire, d'après la loi de Bernoulli, $\frac{pN}{p+q+\ldots+s}$ fois, *le rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles pourra donc servir à définir la probabilité*, définition qui viendra se substituer au Principe de Bernoulli. Elle le suppose d'ailleurs et c'est essentiel : si le rapport du nombre d'arrivées de l'événement E_1 au nombre total des événements ne tendait pas vers le rapport $\frac{p}{p+q+\ldots+s}$ du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles, la définition ne répondant à aucune réalité serait *sans objet*. Enfin cette définition doit contenir le Principe de Bernoulli, en ce sens qu'elle doit le restituer par voie logique. Il en est bien ainsi, mais là, je laisse la parole aux analystes.

L'induction, basée sur l'expérience, montre que si des événements contradictoires E_1, E_2 ont égale chance de se produire, le rapport du nombre d'arrivées de l'événement E_1 au nombre total d'épreuves tend vers la fraction $1/2$ et en diffère d'autant moins que le nombre d'épreuves est plus grand.

J'en déduis par un raisonnement logique que si des événements contradictoires $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ont égale chance de se produire, le rapport du nombre d'arrivées de l'événement E_1 au nombre total d'épreuves tend vers la fraction $\frac{1}{n}$ et en diffère d'autant moins que le nombre d'épreuves est plus grand, au point que, pour un nombre assez grand d'épreuves, la différence sera moindre que toute fraction, si petite qu'on puisse l'imaginer.

J'en déduis encore que si des événements contradictoires $E_1, E_2, \ldots, E_n$ n'ont plus chances égales de se produire mais peuvent être partagés en classes d'événements contradictoires $E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1p}, E_{21}, E_{22}, \ldots, E_{2u}, \ldots, E_{n1}, E_{n2}, \ldots, E_{n3}$ ayant, eux, égales chances de se produire, le rapport du nombre d'arrivées de l'événement E_1 au nombre total d'épreuves tend vers la fraction $\frac{p}{p+q+\ldots+s}$, principe qui au cas de nombres égaux $p, q, \ldots, s$, c'est-à-dire d'égale probabilité des événements $E_1, E_2, \ldots, E_n$, se réduit au premier et par suite, est général.

J'infère de ce principe que le rapport du nombre d'arrivées de l'événement E_1 au nombre total d'épreuves est une quantité $\frac{p}{p+q+\ldots+s}$ indépendante du nombre d'épreuves tentées et *je définis dès lors la probabilité de l'événement E_1 par cette quantité que j'observe être le rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles.*

Cette définition, posée en vertu du principe, doit le renfermer. Sinon, elle n'aurait aucune raison d'être. *Le principe doit donc en être une conséquence logique et il l'est.*

Si le principe était reconnu inexact, la définition tomberait dans la mesure de cette inexactitude. Elle subsisterait dans les cas où le principe subsisterait, elle serait illusoire dans les autres cas.

Enfin, je note que la définition ne tient pas plus compte que le Principe des cas d'exception. J'en conclus que le calcul des Probabilités ne me renseigne que dans une certaine mesure, mesure que la définition même posée au début me permet d'apprécier en me donnant, par voie logique, la loi de

l'*écart*, c'est-à-dire la loi de la différence (du nombre probable d'arrivées $\frac{pN}{p+q+\cdots+s}$. De l'événement E_1, dans une suite de N épreuves, au nombre réel de ses arrivées).

Le Calcul des Probabilités atteint donc son but, qui est de donner des renseignements *moyens*. Si l'on se proposait d'obtenir des résultats exacts, le Calcul des Probabilités n'aurait plus sa raison d'être.

Est-il logiquement constitué ? Dois-je rappeler ici encore l'évolution de la Mécanique Rationnelle ? rappeler qu'en dernière analyse la notion de force : cause du mouvement, étant inaccessible à la pure logique, cette notion a cédé la place à celle-ci : la force est le produit de la masse par l'accélération, la masse même étant un nombre, un coefficient, disent les analystes ? *N'est-il pas clair que le Calcul des Probabilités présente encore un point qui* DÉFIE *la logique ?* Et qu'est-ce donc, *au point de vue logique,* que des événements ayant égale chance de se produire ? Des événements tels qu'il n'existe pas de raison pour que l'un se produise plutôt que l'autre ? Comment savoir qu'il n'est pas de raison en faveur de l'un ou l'autre ? Je ne vois pas de raison pour... est-ce à dire qu'il n'y a pas de raison pour ?

Newton ne voyait pas de raisons pour que la théorie de l'Emission fût contraire à la réalité. Newton cependant se trompait. Fresnel, lui, a trouvé ces raisons que Newton ne voyait pas.

C'est que le principe de raison suffisante, valable dans les circonstances ordinaires de la vie ou, à défaut d'autre base dans les sciences physiques, doit être rejeté des sciences mathématiques. Celles-ci doivent être uniquement fondées sur le principe de contradiction et l'induction savante.

Voici donc que le Calcul des Probabilités est édifié sur une appréciation à priori et par cela même *douteuse* des cas à examiner : si des événements E_{11}, E_{12},..., E_{ns}, disions-nous ont égale chance de se produire... Et quels seront ces événements connus ainsi qualitativement à priori ? Le dilemme est-il impossible à résoudre ? Non, sous condition de se

borner à l'étude d'événements *idéaux*, aussi peu matériels que le sont les lignes géométriques sans épaisseur.

Dès lors, la définition de la probabilité : *rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles* se réfère à un attribut qualitatif des événements étudiés, attribut qui, dans le cas présent, définit les événements. Je sais que tels et tels événements sont également possibles ; pourquoi ? il n'importe, je le sais ; cela suffit. Si l'on veut : *je définis les événements que j'étudie par cette condition qu'ils sont également possibles*, qu'il n'existe aucune raison permettant d'affirmer que l'un plutôt que l'autre se produira. Si je prends un billet de loterie, je ne choisirai pas le billet : aujourd'hui, tous les billets se valent,

Au reste le mot *Probabilité* posé au début est une cause de confusion en ce sens qu'il présuppose trop visiblement le théorème de Bernoulli. Je le remplacerai donc pour un temps par le mot *relativité* et désormais je dirai :

« I. Le calcul des Probabilités a pour objet l'étude d'événements ayant chance égale de se produire ou pouvant se ramener à des événements ayant chance égale de se produire, étant sous-entendu que de tels événements existent »

« II. Si p est le nombre des cas favorables à l'apparition de l'événement E, si P est le nombre des cas qui peuvent se produire, le rapport $\frac{p}{P}$ est appelé la *relativité* de l'événement ».

Théorème. « Le rapport du nombre d'arrivées de l'événement E au nombre des épreuves tentées tend vers un nombre fixe R indépendant du nombre des épreuves, quand le nombre des épreuves croît indéfiniment ».

En conséquence, ce nombre fixe R peut être regardé comme définissant la probabilité de l'événement E. En effet, sur N épreuves, l'événement E se produira, en moyenne, $R \times N$ fois.

Théorème. « Le nombre fixe R n'est autre que la relativité $\frac{p}{P}$ ».

En conséquence, la relativité, ou *le rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles, définit la probabilité.* »

De la science *idéale*, ainsi constituée et basée enfin sur le seul principe de contradiction, nous passerons, quand il sera nécessaire, à la réalité, tout comme le géomètre qui applique au cours des astres les principes de la Mécanique Rationnelle; du moins nous serons assurés que la ruine du Principe de Bernoulli n'infirmerait plus le Calcul des Probabilités. Elle en supprimerait la raison d'être, elle ne ferait pas qu'il devînt science fausse.

Le Calcul des Probabilités a terminé son évolution. Il n'est plus qu'un chapitre de l'Algèbre.

Revenons à la question philosophique et tirons une conclusion de l'étude que nous avons faite. Voici le Calcul des Probabilités fondé sur la « loi des grands nombres, » regardée comme principe d'expérience, en ce sens que j'ai admis comme plus probable, dans un choix d'événements, l'arrivée de l'événement qui, sur un grand nombre d'épreuves se produit le plus souvent.

Et d'abord quelle est la raison d'être de la loi des grands nombres ? simplement ceci : que dans une série suffisamment étendue d'événements, comparables les uns aux autres, les causes déterminantes se neutralisent. Dans l'ensemble des propriétés foncières, les parcelles de telle ou telle étendue prédominent en vertu de ces causes que j'appelle déterminantes, ici les degrés de richesse des propriétaires et aussi les degrés de leur affection au sol. Groupez ensemble toutes les propriétés qui ont même superficie, à un hectare près, cela de 1 à 100 hectares : ces dernières seront encore en nombre assez grand et cela nous importe, nous allons en effet prendre des moyennes ; comparez ensuite les chiffres des dizaines des 100 nombres obtenus par addition des superficies de mêmes espèces : vous trouverez à peu près autant de chiffres impairs que de chiffres pairs. Les chiffres des dizaines n'ayant rien à voir avec les causes déterminantes, rien d'étonnant à ce résultat.

Quelquefois même, les causes déterminantes n'existent pas. La subdivision régionale en arrondissements ne s'est nullement préoccupée, par exemple, du chiffre des dizaines

des superficies. Tout au plus a-t-elle voulu que les superficies totales soient comprises entre certaines limites qui ne peuvent affecter que les chiffres de rang élevé des nombres en question.

Dans l'un et l'autre cas, la loi des grands nombres s'impose en ce sens qu'on ne voit pas pourquoi elle ne serait pas vérifiée. Principe de raison suffisante? Sans doute, mais *principe aussi d'expérience* et cela est *mieux*.

Que conclure ?

Je joue tous les soirs au baccara. J'ai intérêt à connaître les résultats que me donne le Calcul des Probabilités quant à l'opportunité de tirer à 7 ou à 8 et encore je dois combiner ces résultats avec la méthode de jeu de mon adversaire; mais si, égaré par hasard dans la salle de jeu, je joue pour la première fois, étant décidé, au surplus, à ne plus jamais prendre une carte en mains tous les coups ne sont-ils pas d'égale valeur, puisque le Calcul des Probabilités ne s'applique qu'aux suites étendues d'événements ?

La question est oiseuse. Mille événements se rencontrent où la loi des grands nombres intervient et ces événements sont, dans une certaine mesure, comparables les uns aux autres. Le joueur qui, chaque jour, jouerait à un jeu différent aurait intérêt à jouer chaque jour les coups que la théorie donne comme les plus favorables : son gain serait la moyenne des gains théoriques relatifs à chaque coup.

Je conclus donc qu'il existe des suites d'événements dont les causes se neutralisent; ces suites d'événements obéissent en conséquence à la loi des grands nombres ou loi des moyennes.

Je pars de cette conclusion pour m'imposer comme règle de conduite le choix de la détermination que le Calcul des Probabilités m'indique correspondre à l'événement qui, sur une suite étendue, se présente le plus souvent.

Je reconnais donc au Calcul des Probabilités une valeur morale.

Pratiquement, une suite relative à deux événements contradictoires tombe sous le coup de la loi des grands nombres quand le nombre d'épreuves atteint 40. On dit qu'à Monaco

la série de 30 rouges ou 30 noires consécutives n'est pas encore sortie. De fait la probabilité de l'événement est $\frac{1}{1\ 073\ 741\ 824}$ et il y a peu de chances qu'il se produise avant qu'on ait joué un nombre de coups comparable au chiffre 1 073 741 824, disons égal au quotient 1 073 741 824 : 40.

R. DE MONTESSUS

Maître de Conférences à la Faculté Libre des Sciences de Lille.

SUR LE NOMBRE DES TANGENTES

QU'ON PEUT MENER A UNE COURBE PAR UN POINT SITUÉ SUR LA COURBE

1. — Le problème qui a pour but la détermination du nombre des tangentes qu'on peut mener à une courbe algébrique par un point situé sur la courbe se résout d'une manière presque intuitive quand on considère seulement les tangentes réelles, comme on peut voir dans l'ouvrage de Basset, *An elementary Treatise on cubic and quartic curves* (Cambridge, 1901, p. 17). Mais, quand on veut étudier cette question d'une manière générale, en considérant les tangentes réelles et imaginaires, sa résolution est moins facile. C'est à ce point de vue général que s'est placé Salmon dans son ouvrage sur les *courbes planes* (édit. française, Paris, 1884, p. 89), où il a donné à cet égard un théorème important, qu'il a obtenu par une élégante méthode algébrique.

Or, nous allons nous occuper de cette question, en nous plaçant aussi au point de vue algébrique général, pour donner une démonstration, que nous croyons nouvelle, condui-