I. — Quelques remarques sur la continuité.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1906)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

LES FONCTIONS ANGULAIRES
DANS LA GÉOMÉTRIE DE L'AJUSTAGE

I. — Quelques remarques sur la continuité.

DÉFINITION. — Un triangle sphérique dont aucun côté ne dépasse un quadrant est dit un triangle sphérique *réduit*.

LEMME 1. Dans un triangle sphérique réduit tout angle extérieur du triangle est plus grand que chacun des angles intérieurs qui n'ont pas même sommet que lui.

LEMME 2. — Dans un triangle sphérique réduit la bissectrice d'un angle intérieur partage le côté opposé en deux segments dont l'ordre d'inégalité est le même que celui des côtés contigus à ces segments.

Ce lemme est une conséquence du précédent et de la considération du triangle symétrique du proposé par rapport au plan de l'arc de grand cercle bissecteur.

THÉORÈME 1. — Dans tout triangle sphérique réduit, dont les deux côtés de l'angle droit sont suffisamment inégaux et suffisamment réduits, le rapport du plus petit y de ces côtés au plus grand x de ces côtés est un nombre comparable au nombre qui mesure l'angle $\widehat{C}$, opposé au côté y, lorsqu'on prend l'angle droit pour unité.

En d'autres termes, on aura à la fois

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\widehat{C}}{1^{\text{droit}}} = \dfrac{y}{x} \cdot m \; ; \\[2ex] \dfrac{y}{x} = \dfrac{\widehat{C}}{1^{\text{droit}}} \cdot m' \; ; \end{array}\right. \qquad m \text{ et } m' \text{ désignant deux nombres finis.}$$

DÉMONSTRATION. — Considérons un triangle sphérique ABC rectangle en A, dont AB est le côté le plus petit, soit $\widehat{C}$

l'angle aigu opposé à ce côté ; sur AC portons $AD_1 = AB$, et joignons B et D_1, par un arc de grand cercle ; portons $D_1D_2 = BD_1$, et joignons B et D_2 par un arc de grand cercle ; et ainsi de suite ; soit D_n le dernier point obtenu sur AC dans cette opération avant de franchir le point C.

Nommons u_1 la valeur commune des angles de sommets B et D_1 dans le triangle isocèle AD_1B ; nommons de même u_2 la valeur commune des angles de sommets B et D_2 dans le triangle isocèle BD_1D_2 ; et ainsi de suite. La considération de l'excès sphérique dans ces triangles successifs nous donne

$$u_n > \frac{u_1}{2^{n-1}} > \frac{1^{\text{droit}}}{2^n},$$

et par suite

$$\widehat{ABD_n} = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n > u_1\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right);$$

ainsi donc :

$$(1) \qquad 1^{\text{dr.}} > \widehat{CBA} > 2u_1\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Notons en passant cette *conséquence :*

L'angle aigu d'un triangle sphérique rectangle et isocèle dont les deux cotés de l'angle droit tendent vers zéro a pour limite la moitié d'un droit.

Soit P le pôle de l'arc de grandeur AC, répétons à la suite l'angle $\widehat{C}$ autant de fois : q, qu'il est possible, dans l'angle droit $\widehat{ACP}$; les bases opposées au sommet C et situées sur AP dans ces triangles successifs vont en croissant ainsi que les aires de ces triangles ; soit

$$\widehat{ACQ} = \widehat{ACB} \times q,$$

on a :

$$\text{aire ABC} < \frac{\text{aire CQA}}{q},$$

c'est-à-dire en prenant l'aire du triangle trirectangle comme unité :

$$\text{aire ABC} < \text{aire CQA} \cdot \frac{\widehat{C}}{\widehat{ACQ}} < \frac{\text{arc AC}}{1 \text{ quadrant}} \cdot \frac{\widehat{C}}{\widehat{ACQ}},$$

ou

$$\text{(2)} \qquad \text{aire ABC} < \frac{\text{arc AC}}{1 \text{ quadrant}} \cdot \frac{\widehat{C}}{\left(1 - \frac{\theta}{q}\right)^{\text{droit}}},$$

θ désignant un nombre positif < 1 ;

l'entier q sera supposé > 2.

D'ailleurs nous avons pour tirer parti de (2)

$$\text{aire ABD}_n < \text{aire ABC},$$

donc en vertu de (2)

$$u_n + \widehat{\text{ABD}}_n - 1^{\text{dr}} < \frac{u_n}{1 - \frac{\theta}{q}} \cdot \frac{\text{arc AC}}{1 \text{ quadrant}},$$

ou, à fortiori :

$$u_n \left[1 - \frac{1}{1 - \frac{\theta}{q}} \cdot \frac{\text{arc AC}}{1 \text{ quadrant}} \right] + 2u_1 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - 1^{\text{dr}} < 0,$$

$$\text{(3)} \qquad u_n \left[1 - \frac{1}{1 - \frac{\theta}{q}} \cdot \frac{\text{arc AC}}{1 \text{ quadrant}} \right] < 1^{\text{dr}} - 2u_1 + \frac{2u_1}{2^n} < \frac{2u_1}{2^n}.$$

Or nous avons

$$x < 2^{n+1} y,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2^n} < 2 \cdot \frac{y}{x},$$

donc en substituant dans (3) nous aurons cette limitation de u_n

$$u_n < 4u_1 \frac{y}{x} \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{\theta}{q}} \frac{\text{arc AC}}{1 \text{ quadrant}}},$$

et à fortiori

$$\widehat{\text{BCA}} < 4u_1 \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{\theta}{q}} \frac{x}{1 \text{ quadrant}}} \cdot \frac{y}{x},$$

et si

$$\frac{x}{1 \text{ quadrant}} < \frac{1}{3},$$

$$\widehat{BCA} < 12u_1 \frac{y}{x}. \tag{4}$$

Nous allons maintenant limiter le rapport $\frac{y}{x}$ par l'angle C. Sur AB prenons $AD = AC = x$; et portons sur AB à partir de A, $AB = y$, autant de fois, soit r, que possible dans AD ; $AE = (r + 1)\, y > AD$ soit C''_0 l'angle ECA; et soit C_0 l'angle DCA;

$$ry < x < (r + 1)\, y$$

et en vertu d'une remarque précédente :

$$\widehat{C''_0} < (r + 1)\, \widehat{C},$$

et à fortiori :

$$\widehat{C_0} < \left(\frac{x}{y} + 1\right) \widehat{C},$$

d'où

$$\frac{y}{x + y} < \frac{\widehat{C}}{\widehat{C_0}},$$

ce qui donne

$$\frac{y}{x} < \frac{\widehat{C}}{\widehat{C_0} - \widehat{C}}$$

Théorème 2. — Extension du théorème précédent aux triangles plans. Dans la géométrie de la droite fermée, le plan est une variété de la sphère et la méthode précédente s'applique alors sans modification. Nous n'avons alors qu'à envisager le cas de la droite ouverte ; or, en laissant de côté le cas classique d'Euclide, on sait que dans la géométrie de la droite ouverte la somme des angles d'un triangle rectiligne est moindre que 2 droits d'une quantité qu'on appelle le déficit du triangle.

Répétons alors la construction indiquée plus haut des points successifs D_1, D_2,..., D_n situées sur AC et conservons

les notations employées, nous aurons ici, en introduisant $x' = \mathrm{BC}$,

$$x' < 2^{n+1} y \; ;$$

et

$$\widehat{\mathrm{C}} < u_n < 1^{\text{droit}} \cdot \frac{1}{2n} < 1^{\text{droit}} \cdot \frac{2y}{x'} < \frac{2y}{x-y} \; ,$$

ou

$$\frac{\widehat{\mathrm{C}}}{1^{\text{droit}}} < \frac{2y}{y-x} \; .$$

Telle est la limitation de l'angle C par le rapport $\frac{y}{x}$; quant à la limitation du rapport $\frac{y}{x}$ par l'angle C elle ne souffre aucune modification.

Remarque. — Les théorèmes précédents nous seront surtout utiles en considérant des triangles rectangles dont le plus grand côté de l'angle droit sera variable en tendant vers zéro, c'est-à-dire infiniment petit.

On peut alors comme conséquence directe de ces théorèmes énoncer ce résultat : si y est infiniment petit d'ordre supérieur à l'ordre de x, l'angle C est infiniment petit avec x et réciproquement.

De là encore les conséquences importantes qui suivent, mais dont la démonstration est facile et intuitive :

Théorème 3. — Dans un cercle *donné* la corde qui est vue du centre sous un angle infiniment petit est un infiniment petit de même ordre et elle fait un angle infiniment petit avec la perpendiculaire à l'extrémité du rayon.

Théorème 4. — Dans un triangle rectangle (sphérique ou plan) dont le côté de l'angle droit x est fini et dont l'autre côté y est infiniment petit, l'excès de l'hypoténuse z sur le côté x est avec y dans un rapport qui est infiniment petit.

Théorème 5. — Sur le plan (ou sur la sphère) la longueur d'un arc de cercle peut être définie comme la limite du périmètre d'une ligne brisée inscrite dont les côtés tendent simultanément vers zéro. (Remarque ; sur la sphère les éléments de la ligne brisée sont évaluées angulairement par leurs angles au centre de la sphère).

THÉORÈME 6. — La longueur L d'un arc de cercle dont l'angle au centre est α, est déterminé, est une fonction *continue* du rayon r de l'arc et l'on peut écrire

$$(5) \qquad L = \alpha R(r) \ , \qquad \text{la fonction R est continue.}$$

THÉORÈME 7. — Ce théorème s'applique aussi sur la sphère, en évaluant angulairement les longueurs d'arcs de grand cercle et l'on a

$$(6) \qquad l = \alpha\psi(r) \ , \qquad l \text{ et } r \text{ étant évaluées angulairement.}$$

REMARQUE. — Le rapport d'un arc infiniment petit à sa corde tend vers l'unité.

II. Rotations finies autour d'axes concourants. Rotations relatives.

THÉORÈME 8. — Quand un solide éprouve un déplacement autour d'un point fixe, ce déplacement peut être obtenu par une rotation convenable autour d'un axe convenable passant par ce point fixe.

THÉORÈME 9. — Quand un solide fixé par un point O éprouve une rotation α_1 autour d'un axe U_1 passant par ce point ; puis une rotation α_2 autour d'un axe U_2 passant par ce point, le déplacement final du solide peut être obtenu par une rotation unique α_3 autour d'un axe U_3 passant par ce même point.

En représentant les axes par leurs images sphériques *orientées*, sur une sphère de centre O la combinaison des déplacements successifs (1) et (2) est définie comme il suit (toutes les rotations ne dépassant pas un demi-tour) : Par le premier pôle P_1 menons un demi-arc de grand cercle P_1x faisant avec le demi-arc de grand cercle $\overrightarrow{P_1P_2}$ un angle égal à la rotation $-\frac{1}{2}\alpha_1$; par le second pôle P_2 menons un demi-arc de grand cercle P_2y faisant avec le demi-arc de grand cercle $\overrightarrow{P_2P_1}$ l'angle $+\frac{1}{2}\alpha_2$.

Ces deux demi-arcs de grand cercle se coupent au point P_3 et l'angle de $\overrightarrow{P_3P_2}$ avec le prolongement de $\overrightarrow{P_1P_3}$ est égal à $+\frac{1}{2}\alpha_3$.