ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES

Autor(en): **Aubry, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1906)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-9274

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES

Avant propos. — Les théories mathématiques s'éclairent singulièrement quand on les examine d'un point de vue convenablement élevé. Toutefois les méthodes analytiques modernes, assimilables à des instruments d'une haute perfection, demandent comme tels, une grande dextérité dans leur maniement. D'un autre côté, l'esprit n'est complètement satisfait que quand il est parvenu à établir ces mêmes théories, en n'utilisant que les propriétés *strictement nécessaires* à leur démonstration. Aussi les exemples sont nombreux, de vérités mathématiques trouvées d'abord comme corollaires de propriétés très générales et démontrées ensuite par leurs auteurs d'une manière tout élémentaire.

Si l'habitude de voir de haut élargit l'esprit et prépare les découvertes, voir de près ne lui est pas moins nécessaire, en l'accoutumant à s'assurer à mesure de l'entière rigueur de chaque nouvelle déduction. En outre, bien des théories, même très élémentaires, qu'on croyait comprendre, vues de plus près, doivent être reprises à partir du début, et souvent même par une autre voie. Ces considérations témoignent de l'utilité de monographies n'empruntant leurs principes qu'au sujet lui-même, et d'ailleurs exposées aussi élémentairement et aussi complètement que possible.

La théorie des fonctions exponentielles, beaucoup moins utile dans les applications que celle des fonctions circulaires, a en théorie une valeur égale ; et, à ce point de vue, elle demanderait d'être traitée de même d'une manière élémentaire. Or elle peut l'être d'une manière on ne saurait plus simple, par la méthode archimédienne des doubles inégalités de plus en plus approchées, en partant de la *seule* connaissance de cette inégalité, due également à Archimède.

$$(1 + x)^n > 1 + nx \ , \quad (n, \text{ ent. pos. }, x > -1)$$

et de laquelle on déduit aisément la relation fondamentale

$$\frac{1}{1 - mz} > (1 + z)^m > 1 + mz \ , \quad \left(m, \text{ rat. et } > 1 \ , -\frac{1}{m} < z < \frac{1}{m}\right) .$$

Cette théorie ainsi exposée, est une introduction naturelle à la théorie des séries et à celle du calcul infinitésimal, au lieu d'en être un simple corollaire. On obtient ainsi, — *directement* et beaucoup plus rapidement que par les méthodes générales — : une définition *claire* et *rigoureuse* des symboles e^x et Lx ; nombre d'exercices sur les approximations algébriques et numériques ; la démonstration très simple de divers théorèmes ou formules de Neper, Briggs, Kepler, Gregory, Mercator, Halley, Stirling, Euler, Lagrange, de Stainville, Cauchy, Realis, Underfinger, Catalan, Schlömilch, Laisant, Cesàro, etc. ; enfin les séries logarithmiques, exponentielles et binomiales. Il y a lieu de remarquer que pour ces dernières, les conditions de convergence, si délicates à étudier avec les méthodes artificielles ordinaires s'introduisent ici, pour ainsi dire d'elles-mêmes.

1. Désignons par m un nombre rationnel supérieur à l'unité, et par z un nombre quelconque compris entre $-\frac{1}{m}$ et $\frac{1}{m}$; on a (P. M. 1900, p. 406) :

$$(1) \qquad \frac{1}{1 - mz} > (1 + z)^m > 1 + mz \ .$$

2. Les deux expressions suivantes, où on a : $-m < x < m$,

$$(\alpha) \qquad (m, x) = \left(\frac{m + x}{m}\right)^m , \qquad (\beta) \qquad (-m, x) = \left(\frac{m}{m - x}\right)^m ,$$

tendent vers une même limite à mesure que m tend vers l'infini. En effet pour $a > 1$, on a :

$$\left(1 \pm \frac{x}{am}\right)^a > 1 \pm \frac{x}{m} ,$$

d'où, en élevant à la puissance m et dédoublant.

$$(ma, x) > (m, x) \ , \quad (-ma, x) < (-m, x) \ .$$

Si m augmente constamment, la valeur de (α) augmente de plus en plus, tandis que celle de (β) diminue. D'ailleurs leur rapport $\left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^m$, toujours inférieur à 1, est, d'après (1), toujours supérieur à $1 - \frac{x^2}{m}$, et tend donc vers l'unité. Par suite, en appelant $f(x)$ la limite commune de (m, x) et de $(-m, x)$, on a :

$$(m, x) < f(x) < (-m, x) ;$$

et, si on appelle e la limite particulière correspondant à $x = 1$, c'est-à-dire si on pose $f(1) = e$,

$$e = \lim (m, 1) = \lim (-m, 1) \tag{2}$$

$$(m, 1) < e < (-m, 1) \tag{3}$$

Cette limite est d'ailleurs finie, car pour $m = 2$, (2) par exemple, devient $2{,}25 < e < 4$.

3. Les quantités (m, x), (m, y), $(m, x + y)$ tendant en même temps vers des limites finies, on peut poser

$$\frac{f(x)\,f(y)}{f(x+y)} = \lim \frac{(m, x)\,(m, y)}{(m, x+y)} = \lim \left[1 + \frac{xy}{m(m+x+y)}\right]^m$$

La partie entre crochets a une valeur supérieure à 1, et, d'après (1), inférieure à un nombre qui tend vers l'unité, quand m tend vers l'infini. On peut donc écrire

$$f(x)\,f(y) = f(x+y) \tag{4}$$

d'où aisément

$$f(0) = 1 , \quad f(x)\,f(-x) = 1 , \quad f(x)^n = f(nx) , \quad f\left(\frac{x}{n}\right)^n = f(x)$$

et enfin

$$f(x)^{\pm\frac{p}{q}} = f\left(\pm\frac{px}{q}\right)$$

ce qui donne, en faisant $x = 1$, et pour toute valeur rationnelle positive ou négative de ξ.

$$e^{\xi} = f(\xi) = \lim (m, \xi)$$

4. Cette relation n'a de sens, au point de vue du calcul habituel, que si ξ est commensurable. C'est pourquoi il vaut mieux définir le symbole e^x comme désignant la fonction $f(x) = \lim (m, x)$; cette fonction, appelée *exponentielle de* x définit donc un ensemble d'opérations en nombre infini, lequel peut se réduire en *exponentiation* positive et une négative, si x est rationnel.

Ainsi, x désignant un nombre quelconque, on posera d'après cette définition

$$e^x = \lim (m, x) = \lim (-m, x) \tag{5}$$

$$(m, x) < e^x < (-m, x) \tag{6}$$

$$e^x e^y = e^{x+y} \tag{7}$$

La relation (5) a été remarquée, pour la première fois, par Halley (P. T. 1695) et la relation (6) par J. de Stainville (*Mél. d'Anal.* Paris 1815). Les relations (4) et (7) font voir que la fonction e^x est toujours croissante et continue.

5. Posons $e^x = y$; x est dit le *logarithme népérien* de y, ce qui s'indique par la notation $x = \mathrm{L}y$. De là les relations

$$\mathrm{L}1 = 0\,, \quad \mathrm{L}e = 1\,, \quad \mathrm{L}(ab) = \mathrm{L}a + \mathrm{L}b\,, \quad \mathrm{L}(a^m) = m\mathrm{L}a\,. \tag{8}$$

6. De (6) on tire a fortiori, à cause de (1)

$$\frac{1}{1-x} > e^x > 1 + x \qquad (-1 < x < 1)$$

ou, si l'on veut, avec Cauchy (*anal. alg.* Paris, 1821).

$$e^{\pm x} > 1 \pm x \qquad (0 < x < 1) \tag{9}$$

Cor. I. Faisons $x = \mathrm{L}y$, il viendra cette relation de Neper (*Mir. log. constr.* Edinburg, 1617),

$$y - 1 > \mathrm{L}y > \frac{y-1}{y} \tag{10}$$

qui devient, en changeant y en $1 + z$ et en $1 + \frac{1}{z}$,

$$z > \mathrm{L}(1+z) > \frac{z}{1+z} \tag{11}$$

$$(12) \qquad \frac{z}{1-z} > \mathrm{L}\,\frac{1}{1-z} > z$$

II. De (9) on tire, en changeant x en $\frac{x}{m}$,

$$(13) \qquad m\left(\sqrt[m]{e^x} - 1\right) > x > m\left(1 - \sqrt[m]{e^{-x}}\right)$$

7. Posons pour abréger

$$\mathrm{C}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{S}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{T}x = \frac{\mathrm{S}x}{\mathrm{C}x},$$

on aura

$$\mathrm{C}^2x - \mathrm{S}^2x = 1, \quad \mathrm{S}x = 2\mathrm{S}\,\frac{x}{2}\,\mathrm{C}\,\frac{x}{2}, \quad \mathrm{C}x = \mathrm{C}^2\,\frac{x}{2} + \mathrm{S}^2\,\frac{x}{2}$$

$$= 2\mathrm{C}^2\,\frac{x}{2} - 1 = 2\mathrm{S}^2\,\frac{x}{2} + 1$$

Or la relation (9) donne

$$e^x + e^{-x} > 2 \quad \text{d'où} \quad \mathrm{C}x > 1, \quad \mathrm{S}x > 2\mathrm{S}\,\frac{x}{2} > 2\mathrm{T}\,\frac{x}{2} > \mathrm{T}x$$

$$4\mathrm{T}\,\frac{x}{2} + \mathrm{S}x > 8\mathrm{T}\,\frac{x}{4} + 2\mathrm{S}\,\frac{x}{2}$$

Car cette dernière inégalité se réduit à $\mathrm{C}^2\,\frac{x}{4} > 1$. On peut ainsi écrire :

$$e^x - 1 > \mathrm{S}x > \frac{1}{3}\left(4\mathrm{T}\,\frac{x}{2} + \mathrm{S}x\right) > 2\mathrm{T}\,\frac{x}{2} > 1 - e^{-x}.$$

Changeons x en $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{4}$, $\frac{x}{8}$, $\frac{x}{16}$,... et multiplions respectivement par 2, 4, 8, 16,... ; les deux membres extrêmes tendront vers la limite commune x, à cause de (13). Il en sera de même des seconds, troisièmes et quatrièmes membres. Or, comme on l'a vu plus haut, les seconds diminuent constamment ainsi que les troisièmes, tandis que les quatrièmes augmentent. On peut donc écrire :

$$(14) \qquad \mathrm{S}x > \frac{1}{3}\left(4\mathrm{T}\,\frac{x}{2} + \mathrm{S}x\right) > x > 2\mathrm{T}\,\frac{x}{2} > \mathrm{T}x.$$

8. Changeons x en $\mathrm{L}\,(z + \sqrt{z^2 + 1})$, dans le premier et

le troisième membres de (14), et en $L\frac{2+z}{2-z}$ dans le troisième et le cinquième ; il viendra

$$(15)\qquad \frac{2+z}{2-z} > e^z > \sqrt{z^2+1}+z \qquad (2>z>0)$$

Cor. I. Prenons les inverses, il viendra

$$\frac{2-z}{2+z} > e^{-z} > \sqrt{z^2+1}-z\,, \qquad (\text{id})$$

et de là, en retranchant,

$$(16)\qquad \frac{4z}{4-z^2} > Sz > z \qquad (\text{id})$$

d'où, en élevant au carré et changeant z en $\frac{z}{2}$,

$$(17)\qquad 1+\left(\frac{8z}{16-z^2}\right)^2 > Cz > 1+\frac{z^2}{2} \qquad (4>z>0)$$

Ces deux dernières relations conduisent aux suivantes :

$$(18)\qquad z > Tz > \frac{(16-z^2)^2 z}{256+96z^2+z^4} \qquad (2>z>0)$$

$$(19)\qquad \lim\frac{Sx}{x}=1\,,\ \lim\frac{Cx-1}{x^2}=\frac{1}{2}\,,\ \lim Cx=1\,,\ \lim\frac{Tx}{x}=1 \qquad (x=0)$$

II. Les identités

$$Sx = 2S\frac{x}{2}\,C\frac{x}{2}\,,\quad \frac{1}{Tx}-\frac{1}{2T\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\,Tx\,,\quad C^4\frac{x}{2}\left(1-T^4\frac{x}{2}\right)=Cx$$

conduisent, en changeant successivement x en $\frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \frac{x}{8}, \frac{x}{16}, \ldots$ à ces formules

$$(20)\qquad \frac{Sx}{x} = C\frac{x}{2}\,C\frac{x}{4}\,C\frac{x}{8}\ldots$$

$$(21)\qquad \frac{1}{Tx}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\,T\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\,T\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\,T\frac{x}{8}+\ldots$$

$$(22)\qquad \frac{x^3Cx}{S^3x}=\left(1-T^4\frac{x}{2}\right)\left(1-T^4\frac{x}{4}\right)\left(1-T^4\frac{x}{8}\right)\ldots$$

dont les deux premières sont bien connues (voir, par exem-

ple l'*Essai* de M. Laisant, Paris 1873). On en trouvera d'autres du même genre, en traitant de même les identités.

$$(\mathrm{C}x + \mathrm{S}x)(\mathrm{C}x - \mathrm{S}x) = \mathrm{C}^2x - \mathrm{S}^2x\ , \quad \mathrm{S}^2x - \left(2\mathrm{S}\,\frac{x}{2}\right)^2 = \left(2\mathrm{S}^2\,\frac{x}{2}\right)^2,$$

$$\mathrm{S}^2x - 2\mathrm{S}^2\,\frac{x}{2} = 2\mathrm{C}x\,\mathrm{S}^2\,\frac{x}{2}\ ,$$

$$\frac{1}{2\mathrm{S}^2\,\frac{x}{2}} - \frac{1}{\mathrm{S}^2x} = \frac{1}{2\mathrm{S}x\,\mathrm{T}x}\ , \quad \mathrm{T}x - \mathrm{T}\,\frac{x}{2} = \frac{\mathrm{T}\,\frac{x}{2}}{\mathrm{C}x}\ , \quad \frac{1}{\mathrm{T}\,\frac{x}{2}} - \frac{1}{\mathrm{T}x} = \frac{1}{\mathrm{S}x}\ , \ \ldots$$

III. A cause de la première inégalité (16), de la seconde (17) et de la suivante

$$(1 + a)(1 + b) \ldots > 1 + a + b + \ldots\ ,$$

les formules (20), (21), (22) donnent celles-ci

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} & x + \frac{x^3}{4} + \frac{x^5}{16} + \ldots > \mathrm{S}x > x + \frac{x^3}{6} \\ & x > \mathrm{T}x > \frac{3x}{3 + x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{9} - \ldots \end{aligned}\right.$$

$$(24)\qquad 1 > \frac{x^3\,\mathrm{C}x}{\mathrm{S}^3x} > 1 - \frac{x^4}{15}$$

et la dernière, cette autre très approchée,

$$(25)\qquad \frac{\mathrm{S}x}{x} = \sqrt[3]{\mathrm{C}x}\ .$$

Ces relations sont utiles dans le calcul des *expressions hyperboliques* $\mathrm{S}x$, $\mathrm{C}x$, $\mathrm{T}x$.

9. Posons

$$\varphi(k) = 1 + \frac{k}{1}\,a + \frac{k}{1}\,\frac{k-1}{2}\,a^2 + \ldots + \frac{k}{1}\ldots\frac{k-k+1}{k}\,a^k,$$

$$\psi(k) = 1 + \frac{k}{1}\,a + \frac{k}{1}\,\frac{k+1}{2}\,a^2 + \ldots + \frac{k}{1}\ldots\frac{k+n-1}{n}\,a^n,$$

$$\chi(k) = 1 - \frac{k}{1}\,b + \frac{k}{1}\,\frac{k+1}{2}\,b^2 - \ldots - \frac{k}{1}\ldots\frac{k+2n}{2n+1}\,b^{2n+1}\ ;$$

il viendra $(1+a)\,\varphi(k) = \varphi(k+1)$; et, si $k < n$, $o < a < 1$, $0 < b < 1$,

$$\psi(k) > (1-a)\,\varphi(k+1)\,, \qquad \chi(k) > (1+b)\,\chi(k+1)\,.$$

Faisant $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$ et multipliant, il vient, en posant $a = \frac{x}{n}$, $b = \pm\frac{x}{2n}$,

$$(\alpha) \qquad (n, x) = 1 + \frac{x}{1!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!} + \ldots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{x^n}{n!}\,,$$

$$(\beta) \qquad (-n, x) > 1 + \frac{x}{1!} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!} + \ldots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 + \frac{n-1}{n}\right)\frac{x^n}{n!}\,,$$

$$(\gamma) \qquad (-2n, \pm x) > 1 \mp \frac{x}{1!} + \left(1 + \frac{1}{2n}\right)\frac{x^2}{2!} \mp \ldots \mp \left(1 + \frac{1}{2n}\right)\ldots\left(1 + \frac{2n-1}{2n+1}\right)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

Si x est positif, (α) et (β) donnent

$$(n, x) < 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} < (-n, x)$$

d'où

$$(26) \qquad e^x = \lim\left(1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) \qquad (n = \infty)$$

$$(27) \qquad e = \lim\left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) \qquad (\text{id.})$$

Le principe de cette démonstration est dû à de Stainville (l. cit.)

10. La formule (26) a lieu également pour x négatif. En effet, d'après (α) et (β), la valeur de l'expression

$$2\left[1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$$

est comprise entre celles des deux suivantes

$$(2n, x) + (2n, -x) \quad \text{et} \quad (2n, x) + (-2n, x)$$

qui tendent, l'une et l'autre, vers la limite $e^x + e^{x} = 2\mathrm{C}x$, quand n tend vers ∞. On a donc :

$$\mathrm{C}x = \lim \left[1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] \qquad (n = \infty) \tag{28}$$

d'où

$$e^{-x} = \lim \left[1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] \qquad \text{(id.)} \tag{29}$$

$$\mathrm{S}x = \lim \left[\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \ldots \pm \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right] \qquad \text{(id.)} \tag{30}$$

11. De (12), on tire, en changeant successivement z en

$$\frac{x}{n}, \quad \frac{x}{n-x}, \quad \frac{x}{n-2x}, \quad \ldots \quad \frac{x}{n-(n-1)x},$$

et additionnant, cette relation

$$\frac{x}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{1 - \frac{kx}{n}} > \mathrm{L}\,\frac{1}{1-x} > \frac{x}{n} \sum_{0}^{n-1} \frac{1}{1 - \frac{kx}{n}},$$

d'où, en développant les quantités sous les signes Σ, et sommant à l'aide de la formule de Roberval[1],

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p+1} > \frac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} > \frac{1}{p+1},$$

il vient :

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k}\right) x^k > \mathrm{L}\,\frac{1}{1-x} > \sum_1^\infty \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \frac{x^k}{k}$$

Les deux membres extrêmes diffèrent de

$$\sum_1^\infty \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right]\right\} x^k >$$

$$\sum_1^\infty \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{k}\left(1 - 1 + \frac{k}{n}\right)\right] x^k = \frac{2}{n}\,\frac{x}{1-x}$$

[1] Cette formule se déduit de la suivante

$$(p+1)\,n^p > \frac{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}}{n - (n-1)} > (p+1)\,(n-1)^p$$

en y faisant successivement $n = 1, 2, 3, \ldots n$, additionnant et réduisant.

et par suite ils tendent à se confondre quand n tend vers ∞. Or ils comprennent toujours la série $\sum_1^\infty \frac{x^k}{k}$ terme à terme, car on a

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} > \frac{1}{k} > \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$$

On peut ainsi poser

$$\text{(31)} \qquad \mathrm{L}\,\frac{1}{1-x} = \sum_1^\infty \frac{x^k}{k} \qquad (0 < x < 1)$$

et de là

$$\mathrm{L}\,(1+x) = \mathrm{L}\,\frac{1}{1-x} - \mathrm{L}\,\frac{1}{1-x^2} = \sum_1^\infty \frac{x^k}{k} - \sum_1^\infty \frac{x^{2k}}{2k}$$

ou bien

$$\text{(32)} \qquad \mathrm{L}\,(1+x) = \lim\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \ldots - \frac{x^{2n}}{2n}\right) \qquad (n = \infty\,,\ 0 < x < 1)$$

Cauchy (*Rés. Anal.* Turin, 1835) et Schlömilch (*Handb. der Anal.* Iena, 1873) ont démontré cette formule par des moyens analogues, mais leur marche est beaucoup moins élémentaire.

Les deux formules (31) et (32) peuvent se condenser en une seule, qu'on appelle *formule de Mercator* (*Log.* Londres, 1668) et qui est

$$\text{(33)} \qquad \mathrm{L}\,(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \qquad (x^2 < 1)$$

Cor. I. Les formules (31) et (32) donnent celle-ci, remarquée d'abord par Grégory (*Ex. geom.* Londres, 1668.)

$$\text{(34)} \qquad \mathrm{L}\,\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right)$$

et qui pour $x = \mathrm{T}y$, devient

$$\text{(35)} \qquad y = \frac{\mathrm{T}y}{1} + \frac{\mathrm{T}^3 y}{3} + \frac{\mathrm{T}^5 y}{5} + \ldots$$

II. α désignant un nombre quelconque, on a, si $x^2 < 1$,

$$(1+x)^\alpha = e^{\alpha \mathrm{L}(1+x)} = 1 + \frac{\alpha\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \ldots\right)}{1\,!} + \frac{\alpha^2\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \ldots\right)^2}{2\,!} + \ldots$$

Le coefficient de x^n, dans le dernier membre, doit être une fonction entière de α, du degré n ; or ce coefficient devant se réduire à zéro, pour les valeurs 0, 1, 2, 3,... $n - 1$, de l'exposant α, et à l'unité, pour $\alpha = n$, il se confondra avec

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

On a donc la *formule du binome*,

$$(36) \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha}{1}\frac{\alpha-1}{2}x^2 + \ldots \qquad (x^2 < 1)$$

Cette démonstration est due à Cauchy (l. cit.).

Exercices [1]

1. Soient z un nombre positif quelconque et μ un nombre rationnel tendant vers zéro ; on a :

$$\frac{z^\mu - 1}{\mu} > \lim \frac{z^\mu - 1}{\mu} = \lim \frac{z^\mu - 1}{mz^\mu} > \frac{z^\mu - 1}{\mu z^\mu}.$$

En désignant par L z la limite commune, on peut la définir par la relation

$$\mathrm{L}z = \lim m\left(\sqrt[m]{z} - 1\right) = \lim m\left(1 - \sqrt[m]{\frac{1}{z}}\right) \qquad (m = \infty). \text{ (Briggs)}$$

De là, la relation

$$(\alpha) \qquad m\left(\sqrt[m]{z} - 1\right) > \mathrm{L}z > m\left(1 - \sqrt[m]{\frac{1}{z}}\right) \qquad \text{(Lagrange)}$$

En déduire la relation (10) et la troisième des relations (8).

2. 1° De la définition de e^x, déduire les formules suivantes :

$$e = 3\left(\frac{2.5^2}{3^2.6}\right)^1\left(\frac{6.9^2}{7^2.10}\right)^2\left(\frac{14.17^2}{15^2.18}\right)^4\left(\frac{30.33^2}{31^2.34}\right)^8\ldots$$

[1] Voir J. S. 1899-1900, *Th. de la f. log.* ; P. M. 1899, *Rem. sur la série log.* ; P. M. 1900, *Sur une id. d'Euler.*

$$e^3 = 16\left(\frac{5^2.6.8}{4\,6.7^2}\right)^4\left(\frac{9^2.14.16}{8.10.15^2}\right)^8\left(\frac{17^2.30.32}{16.18.31^2}\right)^{16}\cdots$$

$$2{,}5 < e < 3\ ,\quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n\,! < \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}$$

$$e = \lim \frac{n}{\sqrt[n]{n\,!}} \qquad (n = \infty) \quad \text{(Unferdinger)}$$

$$\lim \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}}{n} = \frac{4}{e} \qquad \text{(id.)} \qquad \text{(Laisant)}$$

$$\frac{1}{e} = \frac{\sqrt{C_{2,1}}}{2}\,\frac{\sqrt[4]{C_{4,2}}}{2}\,\frac{\sqrt[8]{C_{8,4}}}{2}\cdots = \frac{\sqrt[3]{C_{3,1}\,.\,C_{2,1}}}{3}\,\frac{\sqrt[3]{C_{9,3}\,.\,C_{6,3}}}{3}\,\frac{\sqrt[27]{C_{27,9}\,.\,C_{18,9}}}{3}\cdots$$

$$e = \frac{2}{1}\sqrt{\frac{4}{3}}\,\sqrt[4]{\frac{6.8}{5.7}}\,\sqrt[8]{\frac{10\,.\,12\,.\,14\,.\,16}{9\,.\,11\,.\,13\,.\,15}}\cdots \qquad \text{(Catalan)}$$

$$e^{\pm x} = \lim\left(1 \pm \frac{x}{n}\right)^1\left(1 \pm \frac{x}{2n}\right)^2\cdots\left(1 \pm \frac{x}{nn}\right)^n \qquad (n = \infty)$$

$$\sqrt{e^x} = \lim\left(1 \pm \frac{x}{n^2}\right)\left(1 \pm \frac{2x}{n^2}\right)\cdots\left(1 \pm \frac{nx}{n^2}\right) \qquad \text{(id.)}$$

2° Dans un vase de contenance connue et plein de vin, on fait tomber un filet d'eau d'un débit connu. Combien restera-t-il de vin après un temps donné, en supposant que le mélange se fait instantanément ? (Terquem.)

3° Quelle est la valeur de l'intérêt composé d'une somme donnée, placée pendant un temps donné à un taux également connu ; les intérêts se capitalisant à chaque fraction infinitésimale du temps ? (Jacques Bernoulli.)

4° Quel doit être le profil générateur d'une tour ronde pleine, chargée à sa partie supérieure d'un poids P, formée d'une matière de densité p, et telle que, dans une section horizontale quelconque, la pression verticale par unité de surface soit constante ? (Poncelet.)

3. Démontrer les relations :

$$\lim \frac{x}{\mathrm{L}x} = \infty\ ,\quad \lim \mathrm{L}\sqrt[x]{x} = 0\ ,\quad \lim \sqrt[x]{x} = 1 \qquad (x = \infty)$$

$$\lim \frac{1}{x^x} = 1 \ , \qquad \lim x^x = 1 \qquad (x = 0)$$

4. Si la somme $x + y + \ldots$ tend vers une limite finie, il en est de même du produit $(1 + x)(1 + y)\ldots$ (Cauchy). Conséquence de (9.)

5. L'équation $e^x + x = 0$ n'a aucune racine réelle. (id.)

6. La fonction $\frac{e^x}{x^m}$ passe par un maximun pour $x = m$. (id.) On s'appuie sur la relation.

$$e^{1 \pm \frac{h}{m}} > e\left(1 \pm \frac{h}{m}\right)$$

7. La fonction $\sqrt[x]{x}$ passe par un maximum pour $x = e$ (Euler). On part de la relation.

$$e^{\pm \frac{h}{e}} > 1 \pm \frac{h}{e}$$

8. On a :

$$(\alpha) \qquad \frac{h}{x} > \mathrm{L}\,\frac{x+h}{x} > \frac{h}{x+h} \qquad \text{(Neper)}$$

$$(\beta) \qquad \frac{x(1+y)}{y} > \frac{\mathrm{L}(1+x)}{\mathrm{L}(1+y)} > \frac{x}{y(1+x)} \qquad \text{(Kepler)}$$

$$(\gamma) \qquad e^a > \frac{e^a - e^b}{a - b} > e^b \ . \quad m^a \mathrm{L}m > \frac{m^a - m^b}{a - b} > m^b \mathrm{L}m \qquad \text{(Realis)}$$

$$\lim \left(\frac{a\sqrt[m]{\alpha} + \ldots + c\sqrt[m]{\gamma}}{a + \ldots + c}\right)^m = \sqrt[a+\ldots+c]{\alpha^a \ldots \gamma^c} \qquad (m = \infty) \quad \text{(Laisant)}$$

$$\mathrm{L}n + 1 > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > \mathrm{L}n + \frac{1}{n}$$

$$x + x^2 + x^4 + x^8 + \ldots > \mathrm{L}\,\frac{1}{1-x} > x + x^3 + x^9 + x^{27} + \ldots$$

9. Substituer dans (11) les valeurs

$$z = \frac{1}{n}, \ \frac{1}{n-1}, \ \frac{2}{n+1}, \ \frac{1}{n^2-1}, \ \frac{4}{n^2-3n-2}, \ \frac{2n+3}{n(n+2)^3},$$

$$\frac{1440}{(n^2-64)(n^2-25)(n^2-49)}, \ \frac{6n^4-4n^2+1}{n^6(n^2-4)},$$

$$z = \sec\omega - 1\ ,\quad -\sin^2\omega\ ,\quad -\cos 2\omega\ .\quad \mathrm{tg}^2\omega\ ,\quad -\mathrm{tg}^4\omega\ ,$$

et en déduire des formules utilisables pour le calcul des logarithmes et des lignes trigonométriques.

10. Dans (11) faisons successivement

$$z = \frac{1}{kn}\ ,\ \frac{1}{kn+1}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{1}{kn+k-1}\ ;$$

en tirer deux limites de $\mathrm{L}\,\frac{n+1}{n}$. Apprécier l'erreur commise en prenant une de ces limites pour la valeur de $\mathrm{L}\,\frac{n+1}{n}$. (Cauchy).

11. Même question en substituant.

$$z = n\,\frac{2k+n}{k^2}\ ,\ n\,\frac{2k+3n}{(n+k)^2}\ ;\ \ldots\ n\,\frac{2k+kn-n^2}{(kn+k-n)^2}$$

12. Des relations de l'exercice 10, déduire la quadrature de l'hyperbole $xy = 1$ (Schlömilch).

13. Tirer le même résultat de la relation (α) de l'exercice 1.

14. Sur une droite AOLN, prenons AO égal à l'unité, et faisons mouvoir le point L uniformément, et le point N de manière que OL soit égal à L (AN). Si la vitesse du premier point est représentée par AO, celle du second l'est par AN (Neper.)

15. Considérons la série dont les deux premiers termes sont $\frac{z^2-1}{2z}$ et $2\,\frac{z-1}{z+1}$, et chacun des suivants alternativement moyen géométrique et moyen harmonique des deux qui le précèdent immédiatement. Les termes de la suite oscillent autour d'une limite finie, L z, dont ils se rapprochent de manière à en différer aussi peu qu'on veut. (Gregory.)

16. 1° De (14) déduire la relation suivante :

$$(\alpha)\qquad \frac{z^2-1}{2z} > \mathrm{L}z > 2\,\frac{z-1}{z+1}\qquad \text{(Kepler et Gregory)}$$

et de là

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^m > e^2 > \left(\frac{m+1}{m-1}\right)^{m-\frac{1}{m}}$$

2° De (15) tirer la suivante :

$$\lim\ \frac{e^x-1-x}{x^2} = \frac{1}{2}\qquad (x=0)\ ,$$

de (14), celle-ci :

$$(\beta)\quad \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m+2} > \frac{12m^2 + 12m + 1}{6m(m+1)(2m+1)} > \mathrm{L}\,\frac{m+1}{m} > \frac{2}{2m+1},$$

et de là

$$e^{\frac{2m+1}{2m+2}} > (m, 1) > e^{\frac{2m}{2m+1}}, \quad \frac{2m+1}{2m+2}\, e > (m, 1) > \frac{2m}{2m+1}\, e.$$

17. De (16), (17) et (23), déduire cette inégalité

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}.$$

18. De (β), exercice 16, on déduit

$$(\alpha)\qquad \frac{1}{12}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) > \mathrm{L}\left(\frac{m+1}{m}\right)^{\frac{2m+1}{2}} - 1 > 0$$

d'où, en appelant Σ la série obtenue en faisant $m = 1, 2, 3, \ldots$ dans le second membre, et posant $e^{1-\Sigma} = c$, nombre d'ailleurs fini puisqu'on a :

$$\frac{1}{12} > \Sigma > 0, \qquad \text{d'où} \qquad e > c > e^{\frac{11}{12}};$$

$$(\beta)\qquad ce^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} < n! < ce^{-n+\frac{1}{12n}} n^{n+\frac{1}{2}}.$$

On tire de là

$$c = 2 \lim \frac{2}{1}\,\frac{4}{3}\,\frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \sqrt{\frac{1}{n}}\,^{1}$$

La formule (β) est ce qu'on appelle la *formule de Stirling*. La démonstration indiquée est celle de M. Césaro (M. 1881), sauf l'origine de la relation (α).

19. Dans (α), exercice 16, faire

$$z = \sec\omega,\ 1 + x,\ \frac{1}{1-x},\ 1 + \frac{2}{n},\ 1 - \frac{2}{n},\ \frac{n^2}{n^2-1},\ \frac{(n^2-1)^2(n+2)}{(n+1)^2(n-2)},$$

[1] D'où, à cause de la formule de Wallis, $c = \sqrt{2\pi}$.

et faire servir les relations trouvées au calcul des logarithmes [1].

20. Représentons par DF (x) la limite du rapport de l'accroissement $F(x \pm h) - F(x)$ de la fonction $F(x)$, à l'accroissement $\pm h$ de la variable, limite dont l'existence n'est d'ailleurs pas certaine a priori. On aura, à cause de (α) et (γ), exercice 8,

$$De^x = e^x \ , \qquad Dm^x = m^x Lm \ , \qquad DLx = \frac{1}{x} \ .$$

21. Considérons les valeurs $F(a)$, $F(a+h)$, $F(a+2h)$,... $F(a+nh=b)$, de la fonction $F(x)$, et désignons par la notation $\int_b^a F(x)\,dx$, la limite, fixe ou indéterminée vers laquelle tend la somme

$$hF(a) + hF(a+h) + \ldots + hF(b)$$

à mesure que h tend vers zéro, ou que n tend vers l'infini.

1° De (11) et de (12) on tirera, en faisant $z = \frac{h}{x}$ et effectuant la sommation,

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = L\frac{b}{a} \ , \qquad \text{d'où} \qquad \int_1^e \frac{dx}{x} = 1$$

ensuite

$$(x+h)[L(x+h)-1] - x(Lx-1) > hLx > x(Lx-1) - (x-h)[L(x-h)-1]$$

d'où

$$\int_a^b Lx\,dx = b(Lb-1) - a(La-1)$$

ou simplement

$$\int Lx\,dx = x(Lx-1) \ .$$

---

[1] Par exemple, la dernière transformation indiquée montre qu'en posant

$$L\frac{(n-1)^2(n+2)}{(n+1)^2(n-2)} = \frac{4}{n(n^2-3)} \ ,$$

l'erreur est inférieure à $\frac{16}{(n^2-4)^5}$. Ainsi, connaissant L7, L8 et L10, on déduira de la sorte L11 avec huit décimales exactes. Le degré d'approximation croît rapidement avec n.

2° Les identités

$$\mathrm{LL}(x+h) - \mathrm{LL}x = \mathrm{L}\left[1 + \frac{\mathrm{L}\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\mathrm{L}x}\right], \quad \mathrm{L}\frac{x+h-1}{x+h+1} - \mathrm{L}\frac{x-1}{x+1}$$

$$= \mathrm{L}\left(1 + \frac{2h}{x^2+xh-h-1}\right),$$

$$\mathrm{L}\sqrt{(x+h)^2 \pm 1} - \mathrm{L}\sqrt{x^2 \pm 1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\left(1 + \frac{h^2+2hx}{x^2 \pm 1}\right)$$

conduisent à

$$\int \frac{dx}{x\mathrm{L}x} = \mathrm{LL}x\,, \quad \int \frac{dx}{x^2-1} = \mathrm{L}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,, \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \mathrm{L}\sqrt{x^2 \pm 1}\,.$$

3° Dans (α), exercice 16, faisons

$$z = \frac{x+h+\sqrt{(x+h)^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}},$$

on aura a fortiori

$$\frac{h}{\sqrt{x^2+1}} > \mathrm{L}z > \frac{h}{\sqrt{(x+h)^2+1}} \quad \text{d'où} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{L}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

4° De (11) on tire :

$$(x+h)^2\,[2\mathrm{L}\,(x+h)-1] - x^2\,(2\mathrm{L}x-1) > 4hx\mathrm{L}x > x^2\,(2\mathrm{L}x-1) - (x-h)^2\,[2\mathrm{L}\,(x-h)-1]$$

d'où

$$\int x\,\mathrm{L}x\,dx = \frac{x^2}{4}\,(2\,\mathrm{L}x-1)$$

5° On a :

$$h\alpha^a + h\alpha^{a+h} + \ldots + h\alpha^b = \frac{\alpha^{b+h}-\alpha^a}{\frac{\alpha^h-1}{h}}$$

d'où, à cause de (γ), exercice 8,

$$\int \alpha^x\,dx = \frac{\alpha^x}{\mathrm{L}\alpha}\,, \quad \int_0^b e^x\,dx = e^b - 1\,.$$

Le principe de cette dernière démonstration est dû à Cauchy. Par des moyens analogues, Schlömilch a donné la valeur

de $\int \frac{dx}{1+x}$. On pourrait en donner beaucoup d'autres, plus ou moins simplement.

22. De la formule (36) revenir à (35), à l'aide de (α), exercice 1.

23. Développer en séries les expressions suivantes :

$$\mathrm{L}\,\frac{1}{1-x} - \mathrm{L}\,(1+x) - \frac{x}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{1+x}{1-x} \qquad \text{(Thompson)}$$

$$\mathrm{L}\,\frac{1+x}{1-x} - \frac{2x}{9}\left(4 + \frac{25}{5-3x^2}\right), \quad \mathrm{L}\,\frac{1+3x}{1-3x} - 4\mathrm{L}\,\frac{1+2x}{1-2x} + 5\mathrm{L}\,\frac{1+x}{1-x}.$$

24. Appliquer la formule (34) aux expressions suivantes :

$$\mathrm{L}\,\frac{(n+3)^2 n}{(n+1)^2(n+4)} \text{ (Müller)} \qquad \mathrm{L}\,\frac{(n-1)^2(n+2)}{(n+1)^2(n-2)} \text{ (Borda)}$$

$$\mathrm{L}\,\frac{(n+5)(n+3)^{10}(n+1)^5}{(n+4)^5(n+2)^{10}n} \text{ (Callet)} \qquad \mathrm{L}\,\frac{(n^2-49)(n^2-1)}{(n^2-25)^2} \text{ (Secrétan)}$$

$$\mathrm{L}\,\frac{(n^2-9)(n^2-16)}{(n^2-25)n^2} \text{ (Haros)} \qquad \mathrm{L}\,\frac{(n^2-64)(n^2-25)(n^2-9}{(n^2-49)^2 n^2} \text{ (Lavernède)}$$

$$\mathrm{L}\,\frac{(n+6)(n+3)(n+2)(n+1)}{(n+5)^2 n^2} \text{ (Lavernède)}$$

$$\mathrm{L}\,\frac{(n-9)(n+8)(n+7)(n-5)(n-1)}{(n+9)(n-8)(n-7)(n+5)(n+1)} \text{ (id.)}$$

25. Posons.

$$\mathrm{F}(x,n) = \frac{x}{n} + \frac{x}{n+x} + \frac{x}{n+2x} + \dots + \frac{x}{n+(n-1)x},$$

$$\Phi(x,n) = \frac{x}{n+x} + \frac{x}{n+2x} + \dots + \frac{x}{n+nx},$$

$$f(x,n) = n\left(\sqrt[n]{1+x} - 1\right), \quad \varphi(x,n) = n\left(1 - \sqrt[n]{\frac{1}{1+x}}\right);$$

De la relation (1) et de l'inégalité connue

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

on tire directement celles-ci :

$$x > \mathrm{F}(x,n) > f(x,n) > \mathrm{F}(x,\infty) = f(x,\infty) = \Phi(x,\infty) =$$

$$= \varphi(x, \infty) > \varphi(x, n) > \Phi(x, n) > \frac{x}{1+x}$$

$$[n, F(x, n)] > [\infty, F(x, \infty)] = 1 + x = [-\infty, \Phi(x, \infty)] > [-x, \Phi(x, n)]$$

$$\lim [F(x, n) + F(y, n) - F(x + y + xy, n)] = 0^1 \qquad (n = \infty)$$

De plus si x est rationnel,

$$\lim (m, 1)^{F(x, n)} = 1 + x, \qquad \text{(id.)}$$

26. Considérons la série dont les deux premiers termes sont Cx, 1, et chacun des suivants alternativement moyen arithmétique et moyen géométrique des deux qui le précèdent immédiatement. Les termes de la suite tendent vers la limite $\frac{Sx}{x}$ (Gergonne).

A. Aubry (Beaugency, Loiret).

EXEMPLE SIMPLE D'UNE FONCTION CONTINUE N'AYANT PAS DE DÉRIVÉE POUR UNE INFINITÉ DE VALEURS DE LA VARIABLE

Lorsque le professeur explique à des débutants la notion de dérivée, il ne soulève pas devant eux la question de savoir si toute fonction continue a une dérivée. Il lui suffit de leur montrer que les fonctions qu'ils connaissent en ont une.

Mais, un peu plus tard, il devient peut-être temps de mettre en garde les élèves, qui faussement guidés par l'intuition, s'imagineraient que toute fonction continue a une dé-

---

[1] Cette relation s'obtient en cherchant l'expression de la limite de la quantité

$$[n, F(x, n)]\,[n, F(y, n)] - [n, F(x + y + xy, n)] .$$

On en tire, en écrivant par définition $F(a - 1, \infty) = La$,

$$La + Lb = L(ab) .$$