Démonstration élémentaire d'un théorème sur le triangle.1

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1906)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

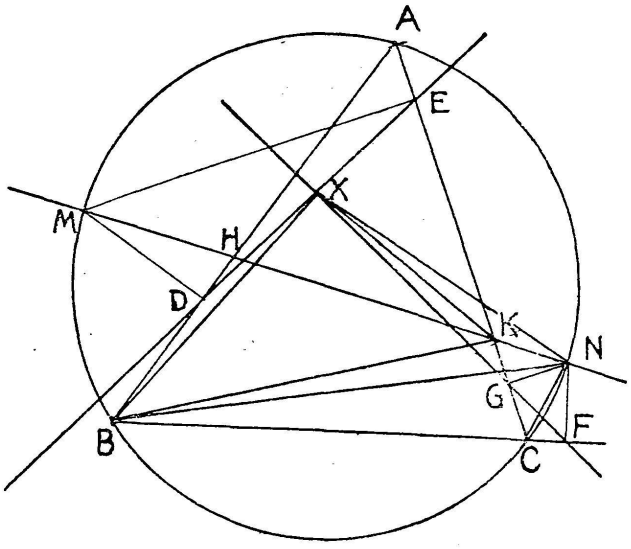
Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Démonstration élémentaire d'un théorème sur le triangle.[1]

Il s'agit du théorème connu : *Etant donnés un triangle ABC et la circonférence circonscrite, les cercles déterminés par les pieds des perpendiculaires abaissées des points d'un même diamètre MN de cette circonférence sur les 3 côtés du triangle, passent par un point fixe.*

Les 2 lignes de Simson des deux extrémités M et N du diamètre sont 2 cercles particuliers parmi ceux que nous considérons. En vertu du théorème bien connu de Tucker, ces 2 lignes de Simson se coupent à angle droit sur la circonférence du cercle des neuf points du triangle donné. Par conséquent nous avons à prouver que le cercle passant par les pieds des 3 perpendiculaires abaissées d'un point quelconque du diamètre MN sur les 3 côtés



passe par le point d'intersection X de ces lignes de Simson. Pour cette démonstration j'utiliserai 2 lemmes :

Lemme I. — Soient D et E les pieds des perpendiculaires abaissées de M sur AB et AC, de sorte que DE est la ligne de Simson de M. De même, soient F et G les pieds des perpendiculaires abaissées de N sur BC prolongé et AC, de sorte que FG est la ligne de Simson de N. Représentons par X le point d'intersection de DE et FG. Les triangles MBN et EXG sont semblables.

Car, comme $\widehat{MBN}$ et $\widehat{CFN}$ sont égaux comme angles droits, et $\widehat{NMB} = \widehat{NCF}$, les triangles MBN et CFN sont semblables et comme

[1] Le manuscrit de cette note était déjà expédié à *la Rédaction* lorsque nous avons trouvé dans les *Nouv. Ann.* de nov. 1905, une démonstration moins élémentaire par M. FONTENÉ, p. 504-506. — T. HAYASHI.

$\widehat{CFN}$ et $\widehat{EXG}$ sont égaux comme angles droits, et $\widehat{CNF} = \widehat{CGF} = \widehat{LEG}$, les triangles CFN et EXG sont semblables.

Donc, les triangles MBN et EXG sont semblables.

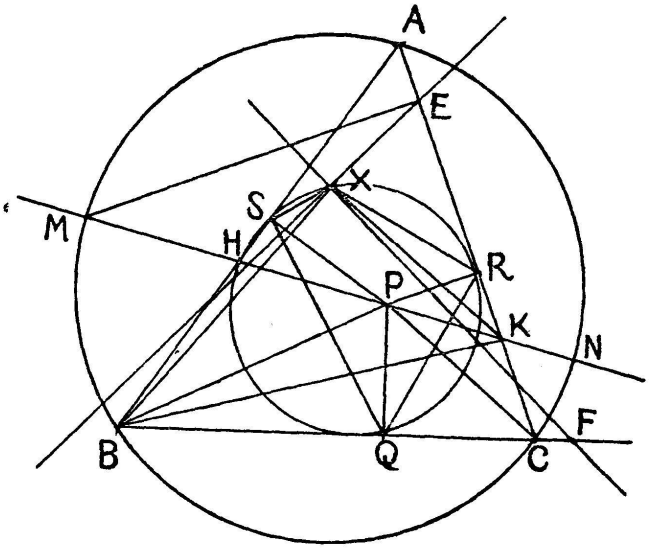
Lemme II. — Représentons par H et K les points d'intersection de MN avec AB et AC respectivement. Les triangles EMK et XBK sont semblables.

Car, puisque ME || NG, on a

$$\frac{KE}{KM} = \frac{KG}{KN} = \frac{EK + KG}{KM + KN} = \frac{EG}{MN} = \frac{EX}{MB} \text{ (Lemme I).}$$

Par suite : $\frac{KE}{EX} = \frac{KM}{MB}$ et $KEX = KMB$.

Donc les triangles KEX et KMB sont semblables.



Par suite : $\widehat{EKX} = \widehat{MKB}$.

D'où $\widehat{EKX} + \widehat{XKM} = \widehat{MKB} + \widehat{XKM}$,

C'est-à-dire $\widehat{EKM} = \widehat{XKB}$,

Et $\frac{KE}{KX} = \frac{KM}{KB}$; d'où $\frac{KE}{KM} = \frac{KX}{KB}$.

Par conséquent les triangles EMK et XBK sont semblables.

Démonstration du théorème. — Soit P un point quelconque situé entre H et K et soient PQ, PR, PS les perpendiculaires abaissées de P sur BC, CA, AB respectivement.

Puisque PR || ME et conséquemment les triangles EMK et RPK sont semblables, les triangles XBK et RPK sont semblables (Lemme II) ; d'où $\frac{KX}{KR} = \frac{KB}{KP}$ et $\widehat{XKR} = \widehat{BKP}$.

Donc les triangles XKR et BKP sont semblables.

Par suite : $\widehat{KRX} = \widehat{KPB}$; d'où $\widehat{XRA} = \widehat{HPB}$.

D'une manière analogue $\widehat{XSA} = \widehat{KPC}$.

En outre, puisque P, Q, C, R sont sur une même circonférence, $\widehat{PQR} = \widehat{PCR}$.

D'une manière analogue $\widehat{PQS} = \widehat{PBS}$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\widehat{RQS} + \widehat{RXS} &= \widehat{PQR} + \widehat{PQS} + \widehat{XKA} + \widehat{XSA} + A,\\ &= \widehat{PCR} + \widehat{PBS} + \widehat{HPB} + \widehat{KPC} + A.\\ &= \widehat{BPC} + \widehat{HPB} + \widehat{KPC},\\ &= 2 \text{ angles droits.}\end{aligned}$$

Donc Q, R, X, S sont sur une même circonférence.

La démonstration dans le cas où P n'est pas situé entre H et K est très peu différente.

Ce qui précède a été suggéré par moi et complété par K. Kato.

T. Hayashi (Tokio).

La loi de « causation » et le postulatum d'Euclide.

I. — Si la géométrie, depuis Euclide, s'est constamment perdue dans la dialectique, et les combinaisons de mots masquant trop souvent la fausseté des raisonnements, c'est pour ne pas avoir mis à la base de son enseignement l'expérience directe, d'où découle la grande loi de la « causation ».

Il me faut bien créer ce mot de « causation » puisque la science latine n'a pas encore osé le faire, s'étant arrêtée à « causalité ». J'entends par loi de la causation, la loi expérimentale suivante :

« *Une même cause produit toujours les mêmes effets.* »

Nous vivons dans cette loi et elle est une des quelques grandes lois naturelles dont nous nous servons constamment, sans jamais la moindre hésitation, et sans pourtant oser franchement l'exprimer à la base de tout notre enseignement.

Je vais avoir cette franchise pour démontrer directement, et sans le secours des parallèles, que les trois angles d'un triangle valent deux droits.

Ainsi sera levé le doute que laisse planer, pour d'aucuns, sur la géométrie, le recours au postulatum d'Euclide, que nous démontrerons au lieu de l'admettre.

II. — 1re Proposition. — *Dans un même cercle, ou dans tous les cercles égaux, de mêmes angles au centre sous-tendent des arcs toujours les mêmes, et réciproquement.*

Cette proposition obéit à la loi de causation ; l'identité des cer-

cles et des angles au centre, qui sont les causes, commande l'identité des arcs sous-tendus qui sont des effets.

Inversément la cause identique « arcs égaux » avec « cercles égaux » commande l'effet identique « angles au centre égaux ».

Il importe de remarquer que je n'ai pas parlé de la réciproque de la loi de causation ; je me suis gardé de dire que l'effet « arcs égaux » devait être engendré par des angles égaux dans des cercles égaux.

Car on ne peut dire qu'un effet donné ne peut être produit que par une cause unique.

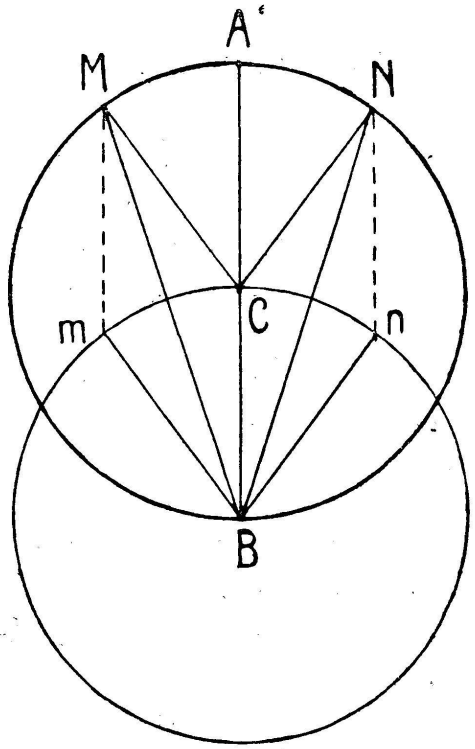
Si la loi de causation est absolue, sa réciproque ne l'est pas.

Remarquons encore que j'ai employé, à dessein, le mot identité comme plus expressif qu'égalité.

2me Proposition. — *Dans un cercle un angle au centre a pour mesure l'arc intercepté entre ses côtés.*

Cette proposition se démontre comme il est fait actuellement dans toutes les géométries.

3me Proposition. — *Un angle inscrit a pour mesure la moitié de l'angle interprété entre ses côtés.*



Soit un cercle de diamètre ACB.

a) Considérons d'abord un angle inscrit MBC dont un côté passe par le centre.

Prenons ensuite l'arc AN égal à l'arc AM et joignons NB ; l'angle ABN sera égal à l'angle ABM en vertu de la loi de causation.

Je vais faire voir que l'angle inscrit MBN est la moitié de l'angle au centre MCN.

Faisons glisser tout le cercle de diamètre ACB, dans le plan sur lequel il est tracé, de manière à ce que le centre C décrive le rayon CB et s'arrête en B.

Opérons ce glissement sans faire subir de rotation sur lui-même au cercle ACB.

Dans ces conditions le point A viendra en C, le point M en *m* et le point N en *n*, les trois points *m* C et *n* étant sur la circonférence en traits interrompus.

Je pourrais dire que la loi de causation provoque le parallélisme des droites Mm, AC et Nn ; je n'en ferai rien ; je me contenterai de dire que ces trois droites sont forcément égales, car elles sont les effets d'une même cause ; cette cause est le glissement du cercle, sans rotation sur lui-même.

Joignons Bm et Bn. L'angle au centre mBn est égal à MCN, puisque c'est ce dernier lui-même demeuré indéformé pendant tout le glissement du cercle.

Dès lors les triangles MBC et MBm sont égaux et isocèles ; ils sont des effets d'une même cause ; cette cause c'est l'égalité de leurs 3 côtés, MB commun, et MC = CB = Bm = Mm = le rayon du cercle.

Il en résulte l'égalité des angles mBM et CBM.

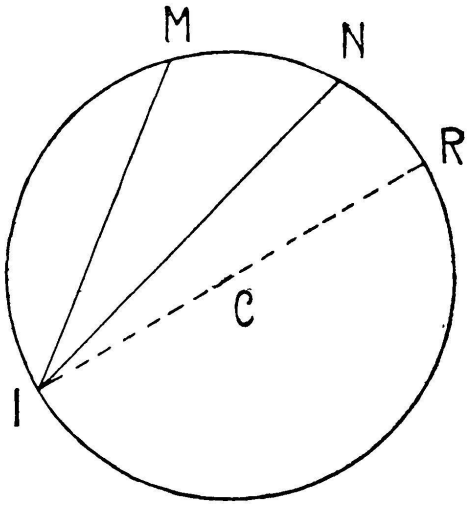
De même les triangles BCN et BNn sont égaux comme ayant les 3 côtés égaux, et l'on a les angles CBN et NBn égaux entre eux.

Comme l'angle ABM est égal à ABN, ainsi que nous l'avons constaté en débutant, il en résulte que l'on a, autour du point B, 4 angles égaux entre eux.

Donc l'angle inscrit MBN est égal à la moitié de l'angle mBn qui est lui-même égal à l'angle au centre MCN.

Donc aussi l'angle MBA (inscrit) est égal à la moitié de mBC ou de son égal MCA (au centre).

Il en résulte que l'angle inscrit MBA comme l'angle inscrit MBN ont pour mesure la moitié des arcs interceptés entre leurs côtés.



b) Considérons maintenant un angle inscrit quelconque MIN dont aucun côté ne passe par le centre de la circonférence.

Par le point I menons le diamètre ICR.

L'angle MIR et l'angle NIR, ayant un côté passant par le centre, ont pour mesures la moitié des arcs MR et NR.

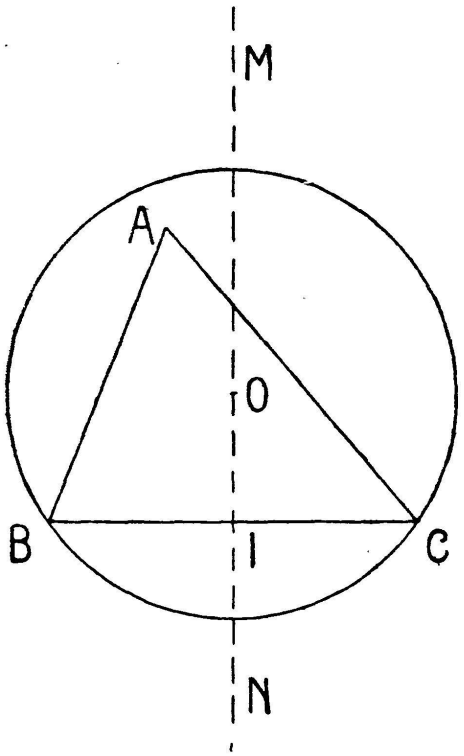
Donc leur différence, c'est-à-dire l'angle MIN, a pour mesure la moitié de la différence des arcs MR et NR, c'est-à-dire la moitié de l'arc MN.

4me Proposition. — *Dans un triangle ABC la somme des 3 angles vaut 2 droits.*

Je puis élever au milieu I de BC, une perpendiculaire MIN.

En prenant un point quelconque O de cette perpendiculaire je puis, de O comme centre, avec OB = OC (causation) comme rayon, décrire une circonférence. Règle générale cette circonférence ne passera pas par A, troisième sommet du triangle. Supposons que notre circonférence ait le point A dans sa courbe.

Si on fait glisser le point O sur la droite MIN, et que dans chacune de ses positions on construise la circonférence passant par B et C, on voit que cette circonférence, partant de la position de O coïncidant avec I, s'enflera de façon *continue*, sans limite ; en fai-



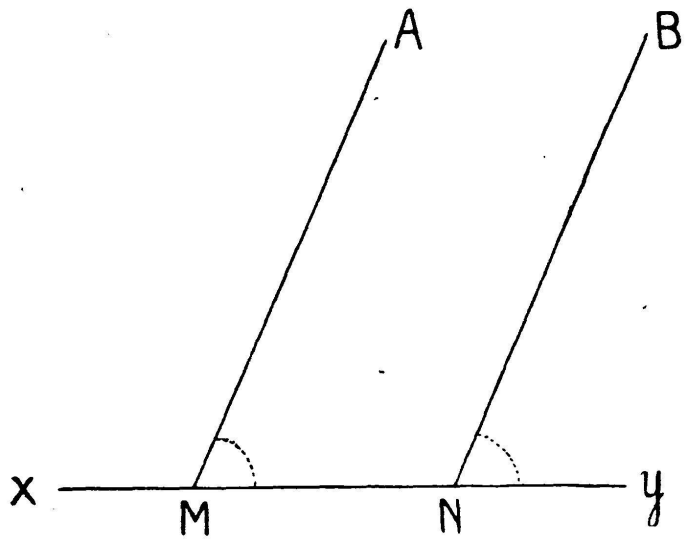
sant glisser O au dessus et en dessous de N, lac irconférence, dans son gonflement continu, couvrira tous les points du plan sans exception, et ne passera qu'une seule fois par chacun d'eux, exception faite pour B et C par lesquels passera toujours la circonférence extensible.

On voit ainsi qu'il existe toujousr une circonférence, *et une seule*, passant par A en même temps que par B et C.

Envisageons maintenant cette circonférence.

Les 3 angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ du triangle inscrit dans une circonférence ont pour mesure la moitié des arcs interceptés entre leurs côtés. A eux 3 ils interceptent toute la circonférence qui correspond à 4 angles droits (qu'on peut inscrire au centre si on veut). Donc la mesure des 3 angles du triangle quelconque ABC est la moitié de la circonférence, qui correspond à 2 droits.

c. q. f. d.



III. — J'aborde le *postulatum d'Euclide.*

Etant donné une droite XY, si en 2 points M et N de cette droite on construit 2 angles égaux, soit AMY = BNY, les deux droites MA et MB ne se rencontreront jamais.

Supposons que les droites AM et BN puissent se rencontrer en un point P.

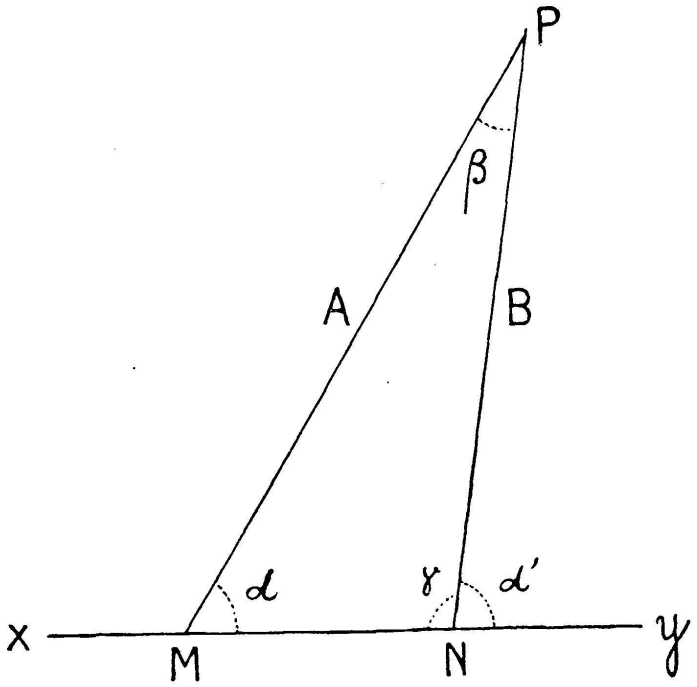
Dans le triangle MPN on aura :

$$\alpha + \beta + \gamma = 2 \text{ droits.}$$

Mais $\gamma + \alpha' = 2$ droits, donc $\alpha + \beta + \gamma = \gamma + \alpha'$

D'où $\alpha + \beta = \alpha'$.

Mais encore $\alpha = \alpha'$ par construction.



Donc $\beta = O$.
Donc les droites MA et NB ne se rencontrent pas.

c. q. f. d.

Commandant LEMAIRE (Bruxelles).

A propos de la rotation de la Terre [1].

Lettre de M. ANDRAULT (Grenoble).

Réponse à M. Combebiac et à M. Richard.

Toute explication est une relation. — A voir l'importance que M. Combebiac attache à la possibilité d'une explication pour tout phénomène, j'avais pensé qu'il allait faire porter son effort sur ce point, et que cherchant à déterminer les conditions de validité d'une explication, il en arriverait à établir la nécessité de l'espace absolu. Maintenant j'ai lieu de croire, qu'il prend le terme dans son acception usuelle, vague et élastique. En ce sens, des explications, on en trouve toujours.

« J'ai ouï dire, écrit Condillac, qu'un physicien se félicitant « d'avoir un principe qui rendait raison de tous les phénomènes « de la chimie, osa communiquer ses idées à un habile chimiste. « Celui-ci ayant eu la complaisance de l'écouter, répondit qu'il ne « lui ferait qu'une difficulté, c'est que les faits étaient tout autres

[1] Voir *L'Enseig. math.* 8me année, pp. 150-155, 229-232, 311-315.