MÉTHODE GRAPHIQUE POUR DÉTERMINER LES RACINES RÉELLES DE L'ÉQUATION $x^3 + px + q = 0$

Autor(en): **Brand, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1906)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-9281

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

MÉTHODE GRAPHIQUE POUR DÉTERMINER LES RACINES RÉELLES DE L'ÉQUATION

$$x^3 + px + q = 0$$

M. F. Chomé — dans la 2e partie de son cours de *Géométrie descriptive à l'Ecole Militaire de Belgique : Plans cotés* — applique (chap. V) la méthode des plans cotés à la construction de tableaux graphiques. L'exemple II est relatif à l'équation du 3e degré.

Sans qu'il soit nécessaire de recourir aux plans cotés, on peut obtenir le tableau graphique de M. Chomé, qui n'est d'ailleurs que l'abaque de Lalanne. (voir par ex. *Nomographie* de Maurice d'Ocagne).

Je me propose de montrer que la méthode de Lill, appliquée à l'équation du 3e degré conduit au même abaque.

Lill a donné un procédé graphique permettant de déterminer les racines réelles d'une équation algébrique de degré quelconque, et a même étendu sa méthode au cas des racines imaginaires (*C. R.*, t. LXV et *Nouv. Ann. de Mathém.*, 1867 et 1868).

On suppose un carré dont le côté est égal à l'unité du dessin et dont les sommets numérotés $0'$, $1'$, $2'$, $3'$ indiquent, par l'ordre naturel des nombres entiers, le sens direct dans lequel il faut suivre le contour du carré.

On construit alors un contour rectangulaire $012345\ldots\omega$ dont les côtés ont des longueurs proportionnelles aux coefficients des puissances successives de x dans l'équation

$$x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0 \ ,$$

depuis la puissance dont l'exposant est m jusqu'à celle dont l'exposant est zéro. Si les coefficients de l'équation sont po-

sitifs, on observe, pour tracer les côtés du contour 0123... ω, le sens des côtés respectivement parallèles du carré de référence 0′ 1′ 2′ 3′. Si un coefficient est négatif, on trace le côté correspondant en sens contraire du côté parallèle du carré de référence. Si un coefficient est nul, le côté correspondant du contour 0123... ω sera nul, mais sa direction sera indiquée par une ligne pointillée.

On construit ensuite un second contour rectangulaire *oabc*... ω, réunissant le point origine *o* au point final ω du contour rectangulaire 0123... ω, les sommets intermédiaires *a*, *b*, *c*,... se trouvant sur les côtés (ou leurs prolongements) du 1er contour rectangulaire.

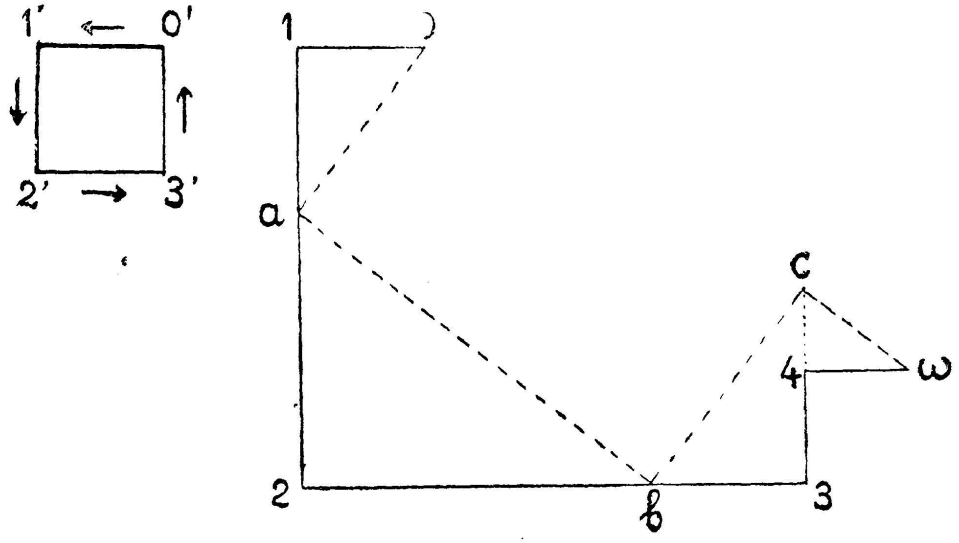

FIG. 1

Ainsi, dans le cas d'une équation du 4e degré, on obtient par exemple la fig. 1. La longueur (1, *a*) représente une racine réelle de l'équation considérée ; cette racine est négative parce que *a* est au-dessous du point 1 ; lorsque *a* est au-dessus de 1 — sur le prolongement de (2,1) — la racine (1, *a*) est positive.

La démonstration de ce procédé ressort immédiatement de la considération des triangles rectangles semblables de la fig. 1.

Cette méthode n'est pas pratique en général, parce qu'elle exige de nombreux tâtonnements. Pour le 2e degré, elle donne une construction simple avec la règle et le compas. Pour le 3e degré on aboutit à l'abaque de Lalanne.

1. *Méthode de Lill.* — L'équation $x^3 + px - q = o$ fournit la fig. 2. On a supposé, pour fixer les idées, $p > o$ et $q < o$ dans l'équation $x^3 + px + q = o$. Le 2e côté (1,2) du 1er contour rectangulaire n'est indiqué que par sa direction, parce que l'équation ne renferme pas de terme en x^2.

Les triangles semblables $(o, 1, a)$, $(2, a, b)$ et $(3, b, 4)$ donnent

$$\frac{(0\,,1)}{(1\,,a)} = \frac{(2\,,a)}{(2\,,b)} = \frac{(3\,,b)}{(3\,,4)},$$

et, si on pose $(1, a) = \alpha$, on trouve $\alpha^3 + p\alpha - q = o$, c'est-

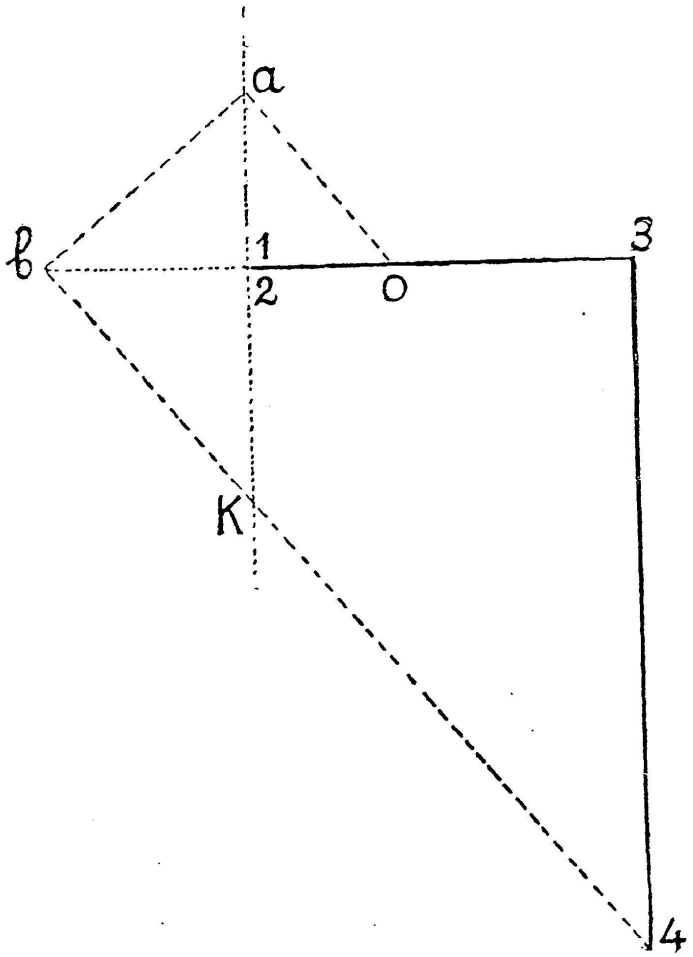

Fig. 2

à-dire l'équation $x^3 + px - q = o$, satisfaite pour la racine positive $x = \alpha$.

2. *Construction de l'abaque.* — Si on prend le point 1 comme origine de 2 axes de coordonnées rectangulaires 1 P et 1 Q dont les parties positives coïncident avec 1,3 et 1, a et qui correspondent aux coordonnées p et q, la droite bk a pour équation

$$\frac{p}{-\alpha^2} + \frac{q}{-\alpha^3} = 1\,.$$

La position de cette droite dépend uniquement de α et il est facile de construire les positions successives de cette droite pour des valeurs consécutives de α.

L'enveloppe de ces droites est $4\,p^3 + 27\,q^2 = o$. C'est une courbe présentant un point de rebroussement de 1e espèce au point 1, la tangente commune aux deux branches de la courbe coïncide avec l'axe 1 P et la courbe est entièrement à gauche du point 1.

Toute tangente à la branche supérieure est une droite bk, située au-dessous de 1 P et correspondant à une valeur positive de α ; toute tangente à la branche inférieure est une droite $b'\,k'$, située au-dessus de 1 P et correspondant à une valeur négative de α. Si on suppose $(1, a') = (1, a)$, les deux points b' et b coïncident et les deux tangentes font des angles égaux avec 1 P. (fig. 3).

Connaissant la position d'une tangente qui correspond à une valeur positive α, on détermine immédiatement la tangente qui correspond à la même valeur prise négativement ; de plus, les racines de l'équation changeant de signes avec le changement de signes de q, on peut se contenter de la partie de la figure qui se trouve au-dessus de 1 P. Toutes les droites allant vers la gauche correspondent à des valeurs positives de α, toutes celles allant vers la droite correspondent à des valeurs négatives de α. Les premières droites étant considérées comme des rayons incidents par rapport à l'axe horizontal, les secondes seront les rayons réfléchis.

Une équation $x^3 + px + q = o$ étant donnée, si $q < o$, on change x en $-x$ et on ramène toujours la recherche des racines au cas où $q > o$. Aux valeurs connues de p et de q correspond un point de coordonnées p et q. Si ce point est entre l'enveloppe et l'axe horizontal, par ce point passent trois tangentes à l'enveloppe (en y comprenant la branche inférieure), il y a trois racines réelles pour x. Si le point (p, q) est sur l'enveloppe, il y a deux de ces trois racines qui sont égales et la troisième est double en grandeur et de signe contraire. Enfin si le point (p, q) est au-dessus de l'enveloppe ou si $p > o$, il n'y a plus qu'une seule racine réelle.

Enfin si les valeurs de p ou de q ne sont pas comprises

dans les limites de l'abaque, on rend les racines de l'équation un certain nombre de fois plus petites. Ce nombre sera choisi entier et de manière à être suffisant.

Remarques. — 1° Si par les points de rencontre des droites de l'abaque avec l'axe horizontal, on mène des perpendicu-

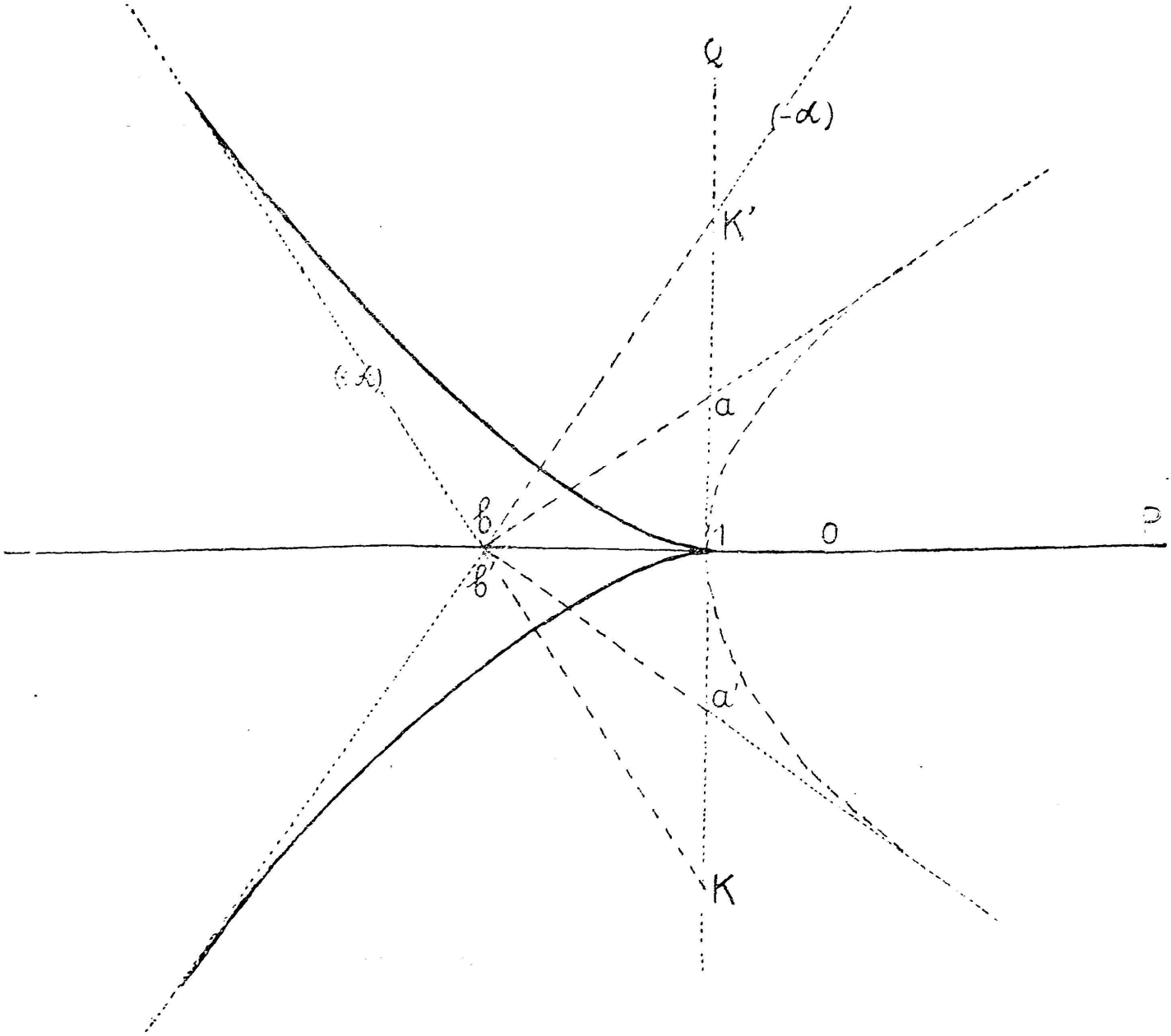

Fig. 3

laires à ces droites, ces dernières auront une enveloppe ayant pour équation $q^2 = 4\,p$. (fig. 3).

2° Si on prend le point milieu de $(1, o)$ comme centre de symétrie, la courbe symétrique de l'enveloppe des droites de l'abaque sera la développée de la parabole $q^2 = 4\,p$. L'enveloppe des droites de l'abaque est elle-même la développée de la parabole $q^2 = -4\,(p - 1)$ et cette dernière para-

bole est donc une trajectoire orthogonale des droites de l'abaque.

3° On pourrait tracer la parabole $q^2 = 4p$ et mener les tangentes à cette courbe. Les perpendiculaires à ces tangentes, menées par les points de rencontre avec l'axe horizontal, donneraient les droites utiles de l'abaque.

E. Brand (Bruxelles).

DÉMONSTRATION D'UNE PROPOSITION RELATIVE AUX ÉQUATIONS LINÉAIRES

Le théorème que nous nous proposons de démontrer est le suivant :

Un système

$$\begin{array}{lllll}
x_1 = b_{1,1}, & x_2 = b_{1,2}, & x_3 = b_{1,3}, & \ldots & x_n = b_{1,n} \\
x_1 = b_{2,1}, & x_2 = b_{2,2}, & x_3 = b_{2,3}, & \ldots & x_n = b_{2,n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_1 = b_{s,1}, & x_2 = b_{s,2}, & x_3 = b_{s,3}, & \ldots & x_n = b_{s,n}
\end{array}$$

de s *solutions du système d'équations linéaires et homogènes,*

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{r,1}x_1 + a_{r,2}x_2 + \ldots + a_{r,n}x_n = 0
\end{array} \right.$$