E. Borel. — Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes, professées à l'Ecole Normale supérieure et rédigées par Maurice Fréchet avec des notes par M. P. Painlevé et H. Lebesgue. — 1 vol. gr. in-8° de 160 p...

Autor(en): **Buhl, A.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1906)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

nombres ordinaux non entiers, et dont l'introduction est cependant nécessaire, si l'on peut s'exprimer ainsi, pour numéroter les éléments de certains ensembles.

Dans l'étude proprement dite des fonctions d'une variable, l'esprit pénétrant de l'auteur se révèle tout de suite avec la notion de semi-continuité. D'une façon extrêmement brève, on peut considérer en un point d'un certain ensemble une fonction f ayant un minimum m et un maximum M en ce point. L'ordinaire condition de continuité se traduit par la double égalité $f = m = M$. Il y a semi-continuité quand l'une seulement de ces égalités a lieu. Un chapitre est consacré aux ensembles de points dans l'espace à n dimensions et l'on y retrouve avec une grande symétrie les considérations développées en détail pour l'espace à une dimension. Une des conclusions, les plus importantes du livre est relative aux développements de fonctions continues et discontinues en séries de polynômes. M. Baire n'a certainement pas livré toute sa pensée à cet égard ; il nous renvoie pour terminer à un mémoire qui doit paraître incessamment aux *Acta mathematica ;* le présent ouvrage y sera en tout cas une introduction aussi excellente que simple.

A. Buhl (Montpellier).

E. Borel. — **Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes,** professées à l'Ecole Normale supérieure et rédigées par Maurice Fréchet avec des notes par M. *P. Painlevé* et *H. Lebesgue.* — 1 vol. gr. in-8° de 160 pages ; prix : 4 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris, 1905.

Ce volume est le huitième de la *Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions.* Il envisage les fonctions de variables réelles dans les voies récemment ouvertes par des œuvres comme la thèse de M. Baire.

A vrai dire il est assez difficile de distinguer bien nettement, tout au moins à l'heure actuelle, ce qui revient au champ réel et au champ complexe. Beaucoup de développements en séries de polynômes peuvent presque toujours servir à représenter indistinctement des fonctions analytiques ou non mais, comme les auteurs qui se sont occupés de ces épineux problèmes ont commencé par séparer les deux champs, il est nécessaire de commencer par accepter cette démarcation.

Aussi bien le fait de se cantonner d'abord dans les variables réelles permet de préciser, avec le maximum de simplicité, une foule de questions relatives par exemple à la continuité des fonctions représentées par des séries à termes continus ainsi qu'à l'intégration de ces mêmes séries. A propos du premier exemple rappelons la condition classique de convergence uniforme, condition inattaquable mais trop solide peut-être, et qui a été remplacée par les conditions plus élastiques de *convergence simplement uniforme* et de *convergence quasi-uniforme* dues respectivement à MM. Bendixson et Arzela.

Quand au développement des fonctions de variables réelles en séries de polynômes c'est là un cas particulier du problème extrêmement général de la représentation analytique approchée de fonctions non analytiques. En ces points on sent nettement que M. Borel a tenu, à l'exemple de Weierstrass, a rejeter des considérations intuitives qui, si elles n'ont pas la valeur rigoureuse de sa pure analyse, peuvent être cependant grandement utiles. Echauffons arbitrairement une barre : par le fait même la température en un point de la barre est d'abord une fonction tout à fait quelconque (continue

ou discontinue, analytique ou non) de l'abscisse de ce point. Au bout d'un temps fini, mais aussi court qu'on le veut, la température en question est devenue fonction analytique de la dite abscisse et par suite, en remontant le temps, la représentation analytique aussi approchée qu'on le voudra est toute trouvée. Que l'on mette cette idée en formules et l'on aura le procédé de Weierstrass et notamment la fameuse intégrale définie dont il se sert et qui n'a que le tort de paraître venir juste à propos sans qu'on sache pourquoi on a recours à elle plutôt qu'à une autre.

A la suite de la méthode de Weierstrass, M. Borel en expose d'autres dues à MM. Volterra, Lebesgue, Runge; il traite de l'extension de ces résultats aux fonctions de plusieurs variables et consacre des pages très intéressantes au problème de l'interpolation. La formule de Lagrange par exemple conduit bien à représenter une fonction par un polynôme mais, comme le remarque très justement l'auteur, il n'est pas sûr que la courbe parabolique ainsi employée se rapproche d'autant plus de la courbe arbitraire donnée qu'on donne un plus grand nombre de points de celle-ci. Aussi M. Borel tente de donner une théorie générale de l'interpolation qui ne soit pas soumise à des inconvénients de cette nature. La partie rédigée par lui se termine avec la représentation des fonctions discontinues. Ce que j'ai dit plus haut à propos de la méthode de Weierstrass montre immédiatement que le fait pour une fonction d'être représentable par une série de polynômes n'est nullement une preuve de continuité. C'est M. Baire qui a défini le premier les fonctions les plus générales représentables par des séries de polynômes. Le jeune et éminent analyste a donné aussi une classification des fonctions qui se rattache immédiatement au point de vue précédent. Les fonctions continues sont de classe zéro, les fonctions développables en séries de fonctions continues et qui ne sont pas continues sont de classe un, celles développables en séries de fonctions de classe un, et qui ne sont pas de classe un, sont dites de classe deux et ainsi de suite. Une fonction de classe n et représentable par une série multiple d'ordre n dont tous les termes sont des polynômes.

Voyons maintenant la note de M. Painlevé *Sur le développement des fonctions analytiques.* Le problème est de trouver un développement, valable non pas seulement dans un cercle comme le développement taylorien mais dans tout le plan sauf peut-être sur certaines demi-droites formant ce que M. Mittag-Leffler a appelé *l'étoile*. M. Painlevé obtient alors très élégamment des développements en séries de polynôme tels que ceux signalés pour la première fois par M. Fredholm. Le principe de la méthode peut s'exposer en deux mots. Considérons deux champs complexes, celui des τ et celui des t puis une transformation conforme changeant les points d'affixe 0 et 1 du premier en les points 0 et 1 du second et réciproquement. Soient $t = \varphi(\tau)$, $\tau = \chi(t)$ les formules définissant cette transformation choisie en outre de façon à changer un contour aussi aplati qu'on le voudra enveloppant le segment $0 - 1$ en un cercle $\operatorname{mod} \tau = \text{const} > 1$. On a

$$f[\varphi(\tau)] = A_0 + A_1\tau + A_2\tau^2 + \ldots$$

ce qui, pour

$$\tau = 1, \quad \text{est} \quad f[\varphi(1)] \quad \text{ou} \quad f(1) .$$

Mais si l'on compare

$$t = \lambda_1 \tau + \lambda_2 \tau^2 + \ldots$$

avec

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots ,$$

développement valable tout au moins dans le voisinage de l'origine, dans lequel on remplace t par la valeur de la formule précédente, on se convainc que A_0, A_1, A_2, ... sont des combinaisons linéaires et homogènes de a_0, a_1, a_2, ... et par suite $f(1)$, non représenté forcément par le développement précédent de $f(t)$ pour $t = 1$, l'est par

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots$$

C'est ce que M. Painlevé appelle une *série génératrice normale*.

Le volume se termine par une seconde note de M. Henri Lebesgue qui revient sur le théorème de M. René Baire dont il a été question plus haut et par une troisième de M. Borel ou ce dernier s'attache à démontrer qu'il existe effectivement des fonctîons dans toutes les classes de M. Baire.

A. Buhl (Montpellier).

Catalogue international de la littérature scientifique, publié par une commission internationale sous la direction de M. le Dr H. Forster Morley. A *Mathematics*. — 1 vol., 201 p. ; prix : fr. 18. 75. Gauthier-Villars, Paris ;

Cette importante publication est due à l'initiative de la *Royal Society* de Londres qui, depuis une dizaine d'années, a réuni une série de conférences internationales en vue de la publication d'un *Catalogue international de la Littérature scientifique*. Les différentes branches scientifiques ont été réparties comme suit en 17 groupes et feront l'objet de 17 volumes annuels.

A. Mathématiques.	G. Minéralogie.	N. Zoologie
B. Mécanique.	H. Géologie.	O. Anatomie humaine.
C. Physique.	J. Géographie.	P. Anthropologie physique.
D. Chimie.	K. Paléontologie.	
E. Astronomie.	L. Biologie générale.	Q. Physiologie.
F. Météorologie.	M. Botanique.	R. Bactériologie.

Il s'agit, comme on le voit, d'une entreprise considérable qui est appelée à rendre de grands services dans tous les domaines de la science ; elle sera particulièrement bien accueillie dans les branches qui, moins favorisées que les sciences mathématiques, ne possédaient pas encore de périodiques spécialement consacrés à la bibliographie, tels que le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* et la *Revue semestrielle de publications mathématiques*.

Chaque volume donne, par ordre méthodique, les titres des ouvrages et des mémoires publiés pendant une année dans les Recueils scientifiques, à partir du 1er janvier 1901. Nous voudrions pouvoir dire de *tous* les ouvrages et mémoires publiés, mais il est matériellement impossible, surtout dans les premiers volumes, d'être absolument complet.

Le présent volume est consacré aux mathématiques. Il contient, après diverses notes d'introduction et listes : *a*) une classification des différentes