# PROPRIÉTÉS CORRÉLATIVES DU PENTAGONE ET DU DÉCAGONE RÉGULIERS

Autor(en): **Redl, Franz**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1906)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-9258

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

# PROPRIÉTÉS CORRÉLATIVES DU PENTAGONE ET DU DÉCAGONE RÉGULIERS

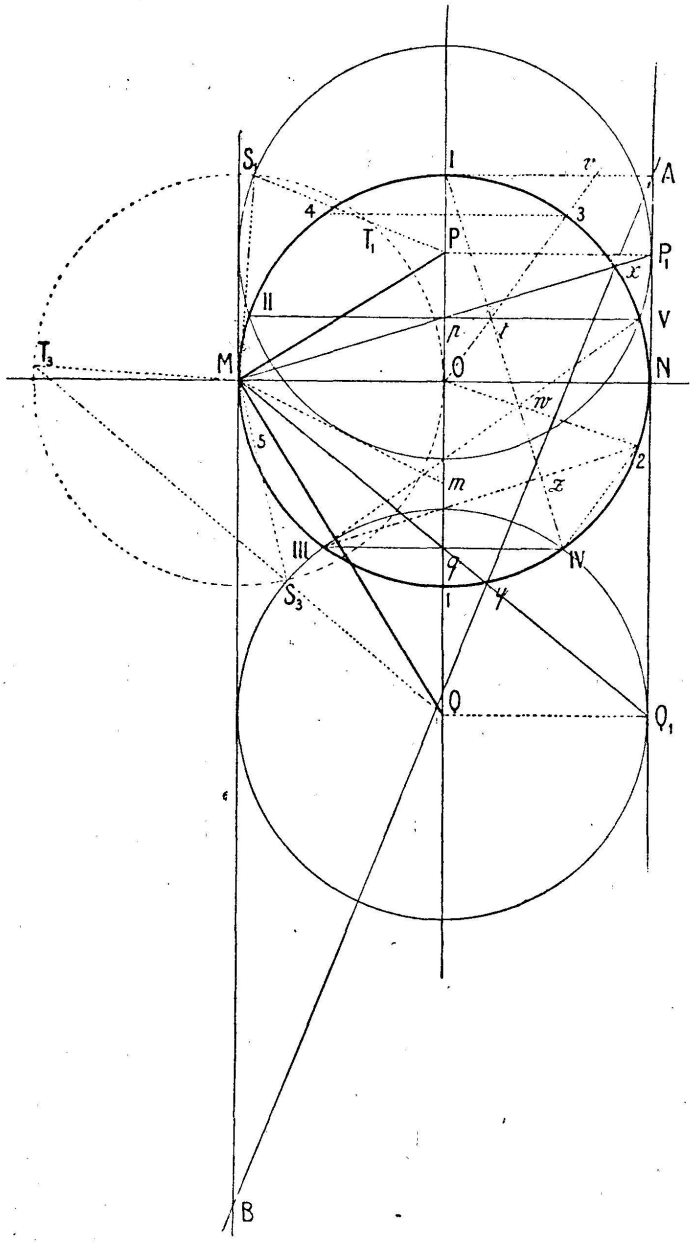
Les mathématiques ne sont, en général, envisagées par les élèves de nos collèges que comme une science dont l'étude offre beaucoup de difficultés mais fort peu d'attraits ; et l'on voit souvent des jeunes gens incapables de progresser dans cette branche lors même qu'ils font preuve d'une grande facilité de compréhension et d'assimilation. La cause de cette répugnance provient peut-être du fait que dans l'enseignement la valeur éducative des mathématiques ne produit pas ses effets, qu'il est donné beaucoup trop de place à la reproduction passive d'énoncés et de démonstrations et que l'élève est pour ainsi dire enserré dans une discipline qui lui enlève la faculté de se développer par lui-même et de s'intéresser ainsi d'une manière plus active à cette partie des études secondaires. En lui accordant sous ce rapport plus de libertés et en lui permettant de se livrer à des recherches personnelles, on pourrait parvenir au but désiré. Le maître devrait surtout orienter ces recherches du côté de la géométrie, science qui, par son caractère parfaitement défini, peut procurer beaucoup de satisfaction à ceux qui l'étudient.

C'est dans le but de fournir un exemple à l'appui de cette manière de voir que l'auteur s'est proposé de montrer comment fonctionne le principe[1] des corrélations d'éléments analogues dans le pentagone et le décagone réguliers.

---

[1] Ce principe est à notre connaissance très peu observé dans l'enseignement bien qu'il soit souvent applicable avec fruit. Ainsi, s'agit-il de transformer un triangle donné en un triangle équilatéral de même surface, on construit des triangles équilatéraux sur les côtés $a$, $b$ et $c$ du triangle donné, aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de ce dernier. Les points milieux de ces triangles équilatéraux forment eux-mêmes des triangles équilatéraux dont

Représentons par $r$ (voir figure) le rayon du cercle, par $s_1$ le côté du décagone, par $s_2$ celui du pentagone, par $s_3$ celui du décagone étoilé, enfin par $s_4$ la diagonale du pentagone. On veut démontrer que $s_1$ et $s_3$ d'une part, $s_2$ et $s_4$ d'autre part jouent le même rôle dans les relations déduites de la figure.




Soient MN et I1 deux diamètres perpendiculaires ; IIV une corde parallèle au diamètre MN et représentant une diagonale du pentagone ; sa longueur est donc égale à $s_4$ ; elle est divisée en $p$ par le rayon OI en deux parties égales ; les angles IIOP et OII$p$ valent respectivement 72° et 18°. Repliant le triangle IIO$p$ autour de II$p$ on obtient le triangle isocèle OIIP, dans lequel OII = PII = $r$ ; l'angle compris entre ces deux côtés est ainsi égal à 36°, de

---

nous représentons les côtés respectivement par D et $d$. En désignant par S la surface du triangle donné, nous avons les relations :

$$\frac{2}{3} S\sqrt{3} = D^2 - \frac{1}{6}(a + b^2 + c^2) ,$$

$$\frac{2}{3} S\sqrt{3} = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) - d^2 ,$$

par addition de ces relations on a :

$$\frac{4}{3} S\sqrt{3} = D^2 - d^2 , \quad \text{d'où} \quad S = \frac{\sqrt{3}}{4}(D^2 - d^2) .$$

Pour le côté du triangle cherché, nous obtenons l'expression $s = \sqrt{D^2 - d^2}$ qu'il est facile de construire.

sorte que la base de ce triangle est le côté $s_1$ du décagone ; d'où la relation :

$$s_1^2 + s_4^2 = 4r^2 \ . \qquad \text{I}$$

Soit encore de l'autre côté de MN la corde III IV parallèle à la droite MN et égale au côté $s_2$ du pentagone (comme on le remarque facilement les points I à V sont les différents sommets d'un pentagone régulier). Si l'on désigne par $q$ l'intersection de III IV avec I1 et si l'on replie le triangle OIII$q$ autour du côté III$q$, on obtient le triangle isocèle OIIIQ dans lequel IIIO = IIIQ = $r$ et l'angle OIIIQ mesure 108°. La base OQ de ce triangle est donc le côté $s_3$ du décagone étoilé et l'on en déduit :

$$s_3^2 + s_2^2 = 4r^2 \ , \qquad \text{II}$$

formule analogue à I.

On remarque également d'après la figure que l'angle 1IIP est égal à $4 \times 18°$ c'est-à-dire à 72° ; mais comme l'angle OPI1 a la même valeur, le triangle P1II est isocèle et l'on a :

$$\text{II1} = s_3 = r + s_1 \ . \qquad \text{III}$$

Les triangles OIIP et 1IIP ayant tous leurs angles respectivement égaux sont semblables ; on en déduit :

$$s_1 : r = r : (r + s_1) \ , \qquad \text{IV}_a$$

et, en tenant compte de la relation III

$$(s_3 - r) : r = r : s_3 \ . \qquad \text{IV}_b$$

De ces deux dernières relations il résulte que :

$$(r - s_1) : s_1 = s_1 : r \ , \qquad \text{V}_a$$

$$s_3 : r = (r + s_3) : s_3 \ , \qquad \text{V}_b$$

ce qui donne pour $s_1$ et $s_3$ les valeurs :

$$s_1 = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) \qquad \text{et} \qquad s_3 = \frac{r}{2}(\sqrt{5} + 1) \ , \qquad \text{VI}$$

et par addition

$$\text{PQ} = s_1 + s_3 = r\sqrt{5} \ . \qquad \text{VII}$$

On pourrait obtenir directement cette valeur en considérant les relations III et $IV_a$; la relation III donne :

$$r^2 = (s_3 - s_1)^2 = s_3^2 - 2s_3 s_1 + s_1^2$$

et avec $IV_a$

$$4r^2 = 4s_1 s_3 ,$$

d'où

$$5r^2 = (s_3 + s_1)^2 .$$

La considération de la figure nous conduit également au même résultat. En effet la proportion $IV_a$ a montré[1] que les côtés de l'angle droit des triangles MOP et MOQ sont proportionnels ; ces triangles sont donc semblables, l'angle PMQ est droit et si $m$ désigne le milieu du rayon O1, on a :

$$PQ = 2mM .$$

D'autre part dans le triangle OM$m$, on a :

$$s_1 + s_3 = PQ = r\sqrt{5} ,$$

puis, en tenant compte de la relation III on obtient

$$r\sqrt{5} = r + 2s_1 = 2s_3 - r .$$

La relation $IV_a$ combinée avec III ou VII donne :

$$s_1^2 + s_3^2 = 3r^2 ,$$

$$s_1^2 - 3s_1 s_3 + s_3^2 = 0 . \qquad \text{VIII}$$

d'où

$$s_1 s_3 = r^2 . \qquad \text{IX}$$

Le théorème de Pythagore appliqué aux triangles OMP, OMQ et PMQ conduit à la relation :

$$s_1^2 + s_3^2 + 2r^2 = 5r^2 ,$$

qui avec IX équivaut à VII

---

[1] La théorie de la puissance d'un point par rapport à un cercle nous conduit aussi à cette proportion. En effet, soit sur la circonférence O,5 le point diamétralement opposé à V, les angles 5IIIO et QIIIO sont respectivement égaux à 72° et 108°, les points Q,III et 5 sont donc situés en ligne droite et l'on a :

$$Q5 = QO = s_3 = r + s_1 .$$

Mais comme $Q_1 = s_1$, il résulte que :

$$s_1(s_1 + 2r) = r(r + s_1) \text{ et } (s_3 - r)(s_3 + r) = s_3^2 - r^2 = r.s_3 . \text{ etc.}$$

Si l'on soustrait cette égalité de II, puis de I, on a :

$$s_2^2 - s_1^2 = r^2 \quad \text{et} \quad s_4^2 - s_3^2 = r^2 \,, \qquad \text{X}$$

relations qui mettent bien en évidence la correspondance qui existe entre les quantités $s_1$ et $s_3$ d'une part et $s_2$ et $s_4$ de l'autre. On voit maintenant d'une manière claire que PM et QM représentent le côté et la diagonale du pentagone régulier ; mais une voie purement géométrique peut de même nous l'indiquer. Traçons en effet de M, P et Q comme centres trois circonférences de rayon $r$ ; puis, désignant par $S_1$ et $S_3$ les intersections des circonférences P et Q avec la circonférence M, menons les sécantes $PS_1$ et $QS_3$ et appelons $T_1$ et $T_3$ les secondes intersections de ces sécantes avec la circonférence M. Des égalités $IV_a$ et $IV_b$ on déduit :

$$S_1T_1 = s_1 \quad \text{et} \quad S_3T_3 = s_3 \,;$$

il en résulte que les angles $S_1MT_1$ et $S_3MT_3$ valent respectivement 36° et $3 \times 36° = 108°$ ; mais comme les côtés égaux des triangles isocèles $S_1MP$ et $S_3MQ$ ont pour longueur $r$ et que les angles compris entre ces côtés valent 72° et 144°, il est ainsi prouvé que $PM = s_2$ et $QM = s_4$.

Des résultats obtenus jusqu'à maintenant, on peut concevoir, par l'emploi de deux compas, une construction du pentagone régulier, construction dans laquelle les points P et Q jouent un rôle symétrique ; ce procédé [1] conduit facilement et rapidement au but. Nous allons l'exposer très brièvement.

Après avoir tracé le cercle O et dans ce cercle les deux axes perpendiculaires MN et I1, on détermine le point $m$, milieu du rayon O1 ; on porte sur le diamètre I1 avec l'aide d'un second compas le segment $m$M de part et d'autre de $m$, ce qui donne les deux points P et Q ; puis, de P et Q comme centres on décrit deux circonférences de rayon $r$ ; les inter-

[1] *Cette note était entre les mains de la Rédaction de cette Revue depuis un an, lorsqu'en novembre 1905 j'ai eu connaissance de la construction publiée par* M. H. Bodenstedt (Braunschweig) *dans le n° 3 des* Unterrichtsblätter für Mathem. u. Phys., t. X. *L'auteur désigne le procédé comme construction géométrographique et celle-ci ne diffère de la mienne qu'en ce qu'elle fournit les points* P *et* Q *de la division en moyenne et extrême raison par la méthode donnée dans la* Géométrographie de Lemoine, Scientia, § XLIII, 3. *Qu'il me soit permis d'ajouter que j'ai trouvé la construction ci-dessus d'une façon indépendante il y a déjà plusieurs années.*

sections de ces dernières avec la circonférence précédente nous donnent, avec le point I, les sommets du pentagone. Cette construction peut être facilement modifiée comme suit: on trace la tangente en N à la circonférence O, on projette sur cette droite les points P et Q en $P_1$ et $Q_1$ ; on relie ces derniers points avec M par deux droites qui coupent le diamètre I1 en $p$ et $q$; les perpendiculaires à ce diamètre par les points $p$ et $q$ déterminent sur la circonférence les 4 sommets cherchés. Cette modification ne rend pas nécessaire l'emploi du second compas, et la simplicité du procédé n'est en rien atténuée; elle offre en outre une certaine liaison avec la construction élégante donnée par Staudt dans le « Journal de Crelle » (vol. 24) et qui outre le cercle O nécessiste seulement une équerre.

Désignons par $x$ et $y$ les intersections du cercle O avec les droites $MP_1$ et $MQ_1$ et prolongeons la corde $xy$ jusqu'à ses rencontres en B et A avec les tangentes en M et N ; il est alors facile de voir que les droites NA et MB ont respectivement pour longueur $r$ et $4r$. En effet: les angles $AxP_1$, $BMy$ et $AQ_1y$ sont égaux, les triangles $AxP_1$ et $AQ_1y$ sont donc semblabes, d'où la proportion :

$$Ax : (AN + s_3) = AP_1 : Ay$$

et l'égalité

$$Ax \cdot Ay = \overline{AN}^2 = (AN - s_1)(AN + s_3) ,$$

ce qui donne

$$s_1 s_3 = (s_3 - s_1) AN ,$$

ou encore

$$s_1 (r + s_1) = r \cdot AN .$$

En comparant ce résultat avec la relation $IV_a$ on a : $AN = r$.

Des triangles également semblables $AxP_1$ et $BxM$ on déduit:

$$AP_1 : BM = xP_1 : xM ,$$

d'où

$$(r - s_1) : BM = xP_1 \cdot MP_1 : xM \cdot MP_1 = s_1^2 : 4r^2 .$$

Puis, tenant compte de la relation

$$s_1^2 = r(r - s_1)$$

déduite de $IV_a$ on conclut que :

$$BM = 4r .$$

Nous voyons par là qu'après avoir déterminé sur les tangentes en N et M les points A et B, on obtient les points $x$, $y$ en coupant la circonférence O par la droite AB et les points $Q_1$, $q$, $P_1$, $p$ en menant les droites M$y$, M$x$. La construction qui vient d'être exposée est celle qu'on emploie en général lorsqu'il s'agit de résoudre une équation du second degré à l'aide d'un cercle fixe et de la règle ; elle est également à la base de l'adjonction apportée par Staudt dans l'article cité plus haut à la méthode de Steiner et Poncelet pour la construction du polygone régulier de dix-sept côtés.

Dans le triangle rectangle MPQ, on a :

$$s_2^2 = s_1 \cdot r\sqrt{5} \quad \text{et} \quad s_4^2 = s_3 \cdot r\sqrt{5} , \qquad \text{XI}$$

puis, multipliant membre à membre ces égalités et tenant compte de $IV_a$, on obtient :

$$s_2 \cdot s_4 = r^2\sqrt{5} , \qquad \text{XII}$$

relation analogue à IX.

Mais de X on déduit :

$$s_2^2 + s_4^2 = 5r^2 ,$$

de sorte qu'on a

$$s_2 + s_4 = r\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} , \; s_4 - s_2 = r\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} , \; s_2^2 + s_4^2 = s_2 \cdot s_4 \cdot \sqrt{5} ; \qquad \text{XIII}$$

d'autre part les égalités XI montrent que :

$$s_4^2 - s_2^2 = r^2\sqrt{5} = s_2 \cdot s_4 = s_3^2 - s_1^2 , \qquad \text{XIV}$$

relation qui, jointe à la troisième des égalités XIII, donne :

$$s_4 = \frac{s_2}{2}(\sqrt{5} + 1) , \qquad s_2 = \frac{s_4}{2}(\sqrt{5} - 1) ; \qquad \text{XV}$$

on en déduit, à l'aide des relations XIV, les valeurs de $s_2$ et $s_4$ exprimées en fonction du rayon $r$. On a, par exemple :

$$s_4 = \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} .$$

D'autre part XIII donne par addition :

$$s_4 = \frac{r}{2}(\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}) ,$$

ce qui fournit à l'élève un exemple de la décomposition d'un radical double en deux autres.

On voit par les expressions XV (comparées aux relations VI), comme aussi par la similitude des triangles III O1 et III IV I, que les longueurs $s_2$ et $s_4$ jouissent des mêmes propriétés que $s_1$ et $r$ ou $r$ et $s_3$ ; elles peuvent en conséquence servir à construire le pentagone régulier dont le côté est donné.

Si nous continuons nos recherches, nous voyons que, par division, les égalités XI donnent :

$$s_2^2 : s_4^2 = s_1 : s_3 = (\sqrt{5} - 1) : (\sqrt{5} + 1)$$

et de là

$$\left.\begin{aligned} s_4^2 &= s_2^2 \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} = s_2^2 \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2} , \\ s_2^2 &= s_4^2 \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} = s_4^2 \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2} ; \end{aligned}\right\} \qquad \text{XVI}$$

les formules XV sont ainsi confirmées.

La valeur $s_4 - s_2 = r\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$ représente la moitié du côté $t_2$ du pentagone circonscrit au cercle O. En effet, soit I$v$ ce demi-côté ; les angles I$vt$ et I$tv$ du triangle I$tv$ sont tous deux égaux à 54° ; les côtés opposés I$t$ et I$v$ sont donc égaux ; d'autre part :

$$t\,\mathrm{IV} = \mathrm{II\ III} = s_2 \quad \text{et} \quad \mathrm{I\,IV} = s_4 ,$$

il s'en suit que :

$$\mathrm{I}t = s_4 - s_2 = \mathrm{I}v .$$

Si l'on désigne par $w$ l'intersection des deux diagonales III V et I IV du pentagone, on a également :

$$\mathrm{I}v = w\mathrm{IV} , \quad \text{car} \quad \mathrm{I}w = \mathrm{II\ III} = s_2 . \quad \text{d'où} \quad w\mathrm{IV} = s_4 - s_2 ,$$

ainsi :

$$\mathrm{I}v = \mathrm{I}t = w\mathrm{IV} = s_4 - s_2 = \frac{s_2}{2}(\sqrt{5} + 1) - s_2 = \frac{s_2}{2}(\sqrt{5} - 1) .$$

Nous déduisons de là une nouvelle construction du pentagone régulier dont le côté $s_2$ est donné ; elle consiste à déterminer le point $w$, en construisant le triangle III IV$w$. Cette construction est alors susceptible d'une double interprétation suivant que la longueur donnée représente le côté $s_2$ du pentagone inscrit ou le côté $t_2$ du pentagone circonscrit. Dans le premier cas le segment obtenu $w$IV représente le demi-côté du pentagone circonscrit ; dans le second cas où $\frac{1}{2} t_2 =$ IV$w$ est donné, on obtiendra le segment III IV, côté du pentagone inscrit. On remarque en outre que si 2 est le point milieu de l'arc IV V et $z$ l'intersection de III 2 avec I IV, on a

$$2w = 2\,\mathrm{IV} = s_1 \quad \text{et} \quad \mathrm{III}\,w = \mathrm{III\,IV} = s_2 \,.$$

La longueur III$z$ exprime la distance des segments II III et I IV et, cette distance est la même que celle des segments III IV et II V ; elle a pour valeur

$$pq = \frac{\mathrm{PQ}}{2} = \frac{s_1 + s_3}{2} = s_3 - \frac{r}{2} \,.$$

On a aussi $z2 = \frac{r}{2}$ du fait que $2\,\mathrm{III} = s_3$ et comme $w\mathrm{IV} = s_4 - s_2$ il en résulte que

$$z\,\mathrm{IV} = \frac{s_4 - s_2}{2} \quad \text{et} \quad z\,\mathrm{I} = \frac{s_4 + s_2}{2} \;;$$

la puissance du point $z$ par rapport au cercle O a pour valeur

$$\frac{s_4^2 - s_2^2}{4} = \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot \sqrt{5}$$

c'est encore la relation XIV.

Les triangles semblables II$p$O et III IV$z$ nous fournissent la démonstration géométrique de la seconde partie de la relation XIV ; on a en effet :

$$\frac{s_4}{2} : r = \frac{r\sqrt{5}}{2} : s_2 \,.$$

Les triangles semblables I III IV et III IV$w$ permettent de trouver la valeur du segment I$q$. En effet, on a :

$$\mathrm{I}q : s_4 = r\sqrt{5} : 2s_2 \,,$$

d'où

$$\mathrm{I}q = \frac{r\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{s_4}{s_2} = \frac{r}{4}(5 + \sqrt{5}) .$$

Cette valeur peut être aussi directement déduite de la figure, dans laquelle

$$\mathrm{I}q = r + \frac{s_3}{2} = \frac{3r + s_1}{2} .$$

Il serait encore possible de comparer les triangles III OQ et I II V puis les triangles $2w$IV, O III IV et I$vt$. Comme propriétés que les élèves pourraient démontrer, nous citons les suivantes :

1. Les points 4, P et V ainsi que les points 2, IV, Q sont situés en ligne droite.

2. Le prolongement de la diagonale du quadrilatère I 32 $w$ passe par le point Q.

3. Représentant par $t_4$ le côté du pentagone étoilé circonscrit au cercle O, on a la relation

$$\frac{t_4}{2} = s_2 + s_4 = r\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} .$$

4. Démontrer au moyen de la figure les proportions :

$$s_2 : s_3 = \sqrt{5} : \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} ;$$

$$s_4 : s_1 = \sqrt{5} : \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} .$$

On pourrait également demander de calculer les segments P3, P2, PV, PIV, QV et $Q_3$ .

Franz REDL (Brunn-Harland, Basse-Autriche).

(Traduction de Georges Bertrand, Genève).