Sur les sommes de sinus et de cosinus dont les arguments sont en progression arithmétique.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

bien flou, et celà est très gênant. Cette phrase : « Les axiomes viennent de l'expérience » n'a pas un sens net, il me serait facile de le montrer, mais celà m'entrainerait trop loin. C'est une raison, et il y en a bien d'autres, pour être très modéré dans les discussions philosophiques et pour ne pas avoir peur de changer d'avis. Il faudrait trouver un moyen d'exprimer sa pensée d'une façon bien nette, sans ambiguïté. Je ne désespère pas d'y arriver, mais je n'y suis pas encore complètement parvenu en ce qui concerne la question des axiomes.

J. Richard (Dijon).

3. Réplique de M. Combebiac.

Ainsi que le fait remarquer M. Richard, il est fort difficile de s'entendre sur certaines questions parce que les mots n'ont que la signification que chacun leur donne. Je crois toutefois pouvoir constater notre accord sur les deux points essentiels, savoir : 1° les mêmes lignes ne peuvent pas servir d'axes à une métrique hyperbolique et à une métrique parabolique ; 2° les difficultés incontestablement fort délicates que soulève la question des relations de la Géométrie et de l'expérience sont du même ordre que celles que l'on rencontre pour les diverses branches de la physique, de sorte que l'on se trouve ramené à la grosse question du réalisme *scientifique* et non plus *géométrique*.

Sur les sommes de sinus et de cosinus dont les arguments sont en progression arithmétique.

Ces sommes donnent lieu à d'intéressants exercices de transformations dans les applications de la formule de Moivre. En raison du rôle qu'elles jouent dans les Mathématiques supérieures, leur sommation mérite d'être examinée, à titre d'exercice déjà dans les éléments.

Posons

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(\alpha + k\beta), \qquad B = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(\alpha + k\beta)$$

et formons la somme

$$A + Bi = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \cos(\alpha + k\beta) + i \sin(\alpha + k\beta) \right\}.$$

Cette expression peut se transformer successivement comme suit :

$$A + Bi = (\cos\alpha + i \sin\alpha) \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \cos k\beta + i \sin k\beta \right\}$$

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\sum_{k=0}^{n-1}(\cos\beta + i\sin\beta)^k$$

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{1-(\cos\beta + i\sin\beta)^n}{1-(\cos\beta + i\sin\beta)}$$

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{1-(\cos n\beta + i\sin n\beta)}{1-(\cos\beta + i\sin\beta)}$$

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{2\sin^2\frac{n\beta}{2} - 2i\sin\frac{n\beta}{2}\cos\frac{n\beta}{2}}{2\sin^2\frac{\beta}{2} - 2i\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{\sin\frac{n\beta}{2} - i\cos\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2} - i\cos\frac{\beta}{2}}\,\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

ou

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{\cos\frac{n\beta}{2} + i\sin\frac{n\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2} + i\sin\frac{\beta}{2}}\,\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$= \left\{\cos\left(\alpha + \frac{n\beta}{2} - \frac{\beta}{2}\right) + i\sin\left(\alpha + \frac{n\beta}{2} - \frac{\beta}{2}\right)\right\}\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$= \left\{\cos\left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2}\right) + i\sin\left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2}\right)\right\}\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

On en déduit

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\cos(\alpha + k\beta) &= \frac{\cos\left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2}\right)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}},\\
\sum_{k=0}^{n-1}\sin(\alpha + k\beta) &= \frac{\sin\left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2}\right)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}.
\end{aligned}\right\}$$

C. Brandenberger (Zurich).