Etude du gas ou la fongtion f() nest pas entière. Resultats de Cesaro.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Etude du cas ou la fonction $f(\xi)$ n'est pas entière. Résultats de Cesaro.

11. — Je vais indiquer très brièvement ce qu'il advient lorsque la fonction sommatrice f a des singularités à distance finie. Je m'en tiendrai d'ailleurs au cas où ce sera une fraction rationnelle. Ce cas qu'il me semble naturel de placer après celui où f n'a pas de singularités à distance finie a été cependant le premier étudié au point de vue historique. Il correspond à des formules données en premier lieu par Cesàro. La formule fondamentale (1) du paragraphe 1 subsiste si Γ est un cercle de rayon fini mais, pour que les intégrations conservent la forme indiquée dans la suite, Γ ne doit contenir aucun point singulier de f. On peut alors imaginer que ce cercle Γ qui a l'origine pour centre soit décrit de manière à s'approcher autant qu'on le voudra du point singulier de f le plus rapproché de l'origine et que la variable ξ, tout en restant dans Γ, s'approche aussi du point singulier en question ce qui est une manière de faire croître $|f(\xi)|$ autant qu'on veut. Mais alors, des conditions $|\xi| < |\zeta|$, $|\xi x| < |\zeta z|$, on ne peut tirer autre chose que $|x| \leqq |z|$. La condition $|x| < |z|$ est la même que celle qui caractérise la formule de Taylor ; comme de plus nous pouvons avoir $|x| = |z|$ il s'en suit que l'on peut obtenir des formules valables sur la circonférence du cercle de convergence d'un développement taylorien.

Prenons par exemple $f(\xi) = \frac{1}{1-\xi}$. Nous aurons

$$F(x) = \lim_{\xi=1} \frac{s_0 + \xi s_1 + \xi^2 s_2 + \dots}{1 + \xi + \xi^2 + \dots}$$

ou

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}}{n}$$

ce qui est la formule bien connue donnée par Cesàro.

Prenons encore, p étant entier,

$$f(\xi) = \frac{1}{1-\xi^p}.$$

Alors

$$F(x) = \lim_{\xi=1} \frac{s_0 + \xi^p s_p + \xi^{2p} s_{2p} + \cdots}{1 + \xi^p + \xi^{2p} + \cdots},$$

ou

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_p + s_{2p} + \cdots + s_{(n-1)p}}{n}.$$

Pour $p = 1$, cette dernière formule redonne celle de Cesàro. On peut faire à son sujet plusieurs remarques curieuses.

D'abord on peut la considérer comme un cas particulier des formules obtenues non pas en faisant tendre ξ vers la racine égale à 1 de l'équation $\xi^p - 1 = 0$ mais en faisant tendre ξ vers l'une quelconque des racines de cette équation, c'est-à-dire vers l'un des sommets d'un polygone régulier de p côtés inscrit dans le cercle $|\xi| = 1$.

Voici une remarque plus importante encore relative à la dernière formule donnée pour $F(x)$. Soit x à l'intérieur du cercle de convergence. Alors on peut prendre p assez grand pour que les sommes $s_p, s_{2p}, \ldots, s_{(n-1)p}$ diffèrent les unes des autres d'aussi peu qu'on voudra. Dans ces conditions la formule considérée peut s'écrire

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \left[\frac{s_0}{n} + \frac{n-1}{n} s_{(n-1)p}\right]$$

c'est-à-dire

$$F(x) = \lim_{n=\infty} s_{(n-1)p}.$$

Ce n'est autre chose que la formule de Taylor elle-même qu'il est bien intéressant de retrouver directement comme cas particulier de formules plus générales étudiées dans ce travail.

A. Costabel (Montpellier).