I. Droites parallèles. Angle de deux droites.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

face telle que si on y marque deux points à volonté, la droite qui les joint est toute entière sur la surface.

On démontre qu'un plan est déterminé de position :

1° par deux droites qui se coupent ;

2° par trois points qui ne sont pas en ligne droite ;

3° par une droite et un point extérieur à cette droite ;

4° par deux droites parallèles.

Nous rappelons également les deux propositions suivantes :

1° L'intersection de deux plans qui se coupent est une ligne droite ;

2° Par un point pris hors d'une droite on peut lui mener une parallèle et une seule.

Ces préliminaires posés nous continuerons comme il suit.

I. Droites parallèles. Angle de deux droites.

2. — Théorème I. Si par deux droites parallèles AX et BY on fait passer deux plans P et Q se coupant suivant une droite CZ, cette droite est parallèle à chacune des deux autres.

Démonstration. Désignons par R (fig. 1) le plan des deux parallèles AX et BY : il forme avec les deux autres une figure invariable. Concevons qu'on lui fasse subir une translation *rectiligne* de directrice AX ; si on assujettit le plan R à glisser sur lui-même, chacun des plans P et Q glissera également sur lui-même. Quand le point A de AX aura décrit sur cette droite un segment $AA' = l$, le point B de BY, parallèle à AX, aura décrit sur cette droite un segment $BB' = AA' = l$. Le point C de CZ aura décrit dans le plan P un segment de droite égal et parallèle à AA′ et dans le plan Q un segment de droite égal et parallèle à BB′ ; or le point C a effectué un trajet *unique* qui appartient à chacun des plans P et Q ; il a donc décrit sur leur intersection CZ un segment $CC' = l$ parallèle à la fois à AX et à BY. Donc l'intersection CZ des deux plans P et Q est parallèle à chacune de ces droites.

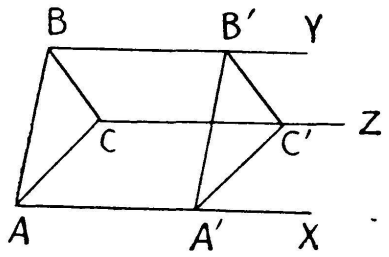

Fig. 1

C. Q. F. D.

Corollaire. Si, dans l'espace, deux droites BY et CZ sont respectivement parallèles à une 3e droite AX, ces droites sont parallèles entre elles.

Démonstration. Un point C de la droite CZ (fig. 1) détermine avec AX un plan P et avec BY un plan Q lesquels se coupent suivant une droite Δ passant par le point C ; or cette droite est parallèle à AX et à BY ; mais par le point C on ne peut mener qu'une seule parallèle à AX ; donc la droite Δ se confond avec CZ et par conséquent les droites BY et CZ sont parallèles. C.Q.F.D.

Remarque. Ce théorème fournit la démonstration classique bien connue du théorème suivant :

THÉORÈME II. Si deux angles ont leurs côtés parallèles 2 à 2 et de même sens, ces angles sont égaux.

Supposons que les deux angles ACB, A'C'B' (fig. 1) répondent à la question, on peut aussi démontrer le théorème comme il suit :

Les deux côtés parallèles CA et C'A' déterminent un plan P ; de même les côtés parallèles CB et C'B' déterminent un plan Q, ces deux plans se coupent suivant une droite CC'. Cela posé, concevons que l'on fasse subir à l'angle ACB une translation rectiligne égale et parallèle à CC' ; si on assujettit le plan P à glisser sur lui-même, le plan Q glissera également sur lui-même et les droites CA et CB viendront simultanément coïncider avec leurs parallèles respectives C'A' et C'B' ; dès lors l'angle ACB coïncidera avec l'angle A'C'B', donc ces angles sont égaux. C.Q.F.D.

Angle de deux droites non situées dans le même plan.

3. — DÉFINITION. Si deux droites orientées D et D' ne sont pas dans le même plan, on appelle angle de ces droites *l'angle plan* que l'on obtient en menant par un point O de l'espace deux demi-droites D_1 et D'_1 (fig. 2) respectivement parallèles aux deux premières et de même sens. Si on recommence la même construction pour un autre point O' les nouvelles demi-droites, respectivement parallèles à D et à D' le seront également

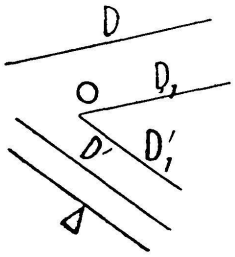

Fig. 2

à D_1 et à D'_1. On aura donc deux angles plans ayant leurs côtés parallèles 2 à 2 et de même sens et par conséquent ces angles seront égaux. Le point O peut donc être choisi arbitrairement et au besoin sur l'une des droites données. La définition qui précède est donc ainsi complètement justifiée.

Si l'angle plan ainsi formé est droit, on dit que les deux droites D et D′ sont *perpendiculaires* ou bien *orthogonales*.

Il est bon d'observer que si une droite D est orthogonale à une droite D′, elle l'est également à toute parallèle Δ à la droite D′, car la parallèle à Δ par le point O est parallèle à D′ et se confond par conséquent avec D'_1.

II. Perpendicularité d'une droite et d'un plan.

4. — Les propositions qui font l'objet de ce paragraphe, le plus important du 5me livre, sont établies d'une façon très simple et en même temps très générale grâce à l'emploi de l'angle de deux droites, dans les *Eléments de Géométrie* de H. Bos et A. Rebière, publiés en 1881 par la Librairie Hachette et Cie.

Nous utiliserons dans ce qui va suivre les propositions suivantes:

1° Si une droite D est perpendiculaire à un plan P, toute parallèle D′ à D est aussi perpendiculaire au même plan.

En effet puisque la droite D est orthogonale à une droite quelconque du plan P, il en est de même de sa parallèle D′, donc la droite D′ est perpendiculaire au plan P.

2° Si deux droites D et D′ sont parallèles, tout plan P perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre. Cette proposition est une conséquence de la précédente.

3° Réciproquement: Si deux droites D et D′ sont perpendiculaires à un même plan P, ces droites sont parallèles.

Si par un point M de D′ on mène la parallèle à D, elle sera perpendiculaire au plan P ; donc elle se confondra avec D′ et par conséquent D′ est parallèle à D. — C. Q. F. D.

4° Enfin nous utiliserons également le *théorème des 3 perpendiculaires*.