IV. — Parallélisme de deux plans

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

pendiculaire au plan P est perpendiculaire ou orthogonale à la droite AB.

Corollaire. — Une droite et un plan parallèles sont partout également distants: de sorte que si la droite a un de ses points dans le plan, elle y est contenue toute entière.

2° Les portions de deux droites parallèles comprises entre une droite AB et un plan P qui lui est parallèle sont égales.

3° Si une droite AB est parallèle à un plan P on peut, par une translation rectiligne, placer cette droite dans le plan.

Démonstration. — En effet, par la droite AB (fig. 3) menons un plan Q qui coupe le plan P suivant une droite CD. Puisque ces deux droites sont parallèles on sait que par une translation rectiligne en peut amener AB à coïncider avec CD. La droite AB sera ainsi placée dans le plan P.

C. Q. F. D.

IV. — Parallélisme de deux plans.

10. — Définition. On dit que deux plans P et Q sont *parallèles* lorsque l'un des deux a tous ses points à la *même* distance de l'autre.

Théorème I. — Si deux plans P et Q sont perpendiculaires à une même droite LL', en deux points différents A et B, ces plans sont parallèles.

Démonstration. — Nous allons prouver que le plan P a tous ses points à la même distance AB du plan Q (fig. 4).

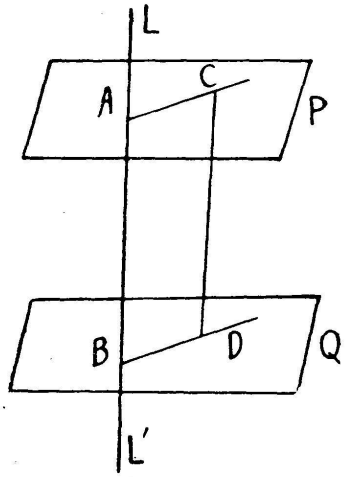

Fig. 4.

Dans le plan P prenons arbitrairement un point C et de ce point menons la droite CD perpendiculaire sur le plan Q. Les droites AB et CD perpendiculaires au plan Q sont parallèles; mais la droite BA est aussi perpendiculaire au plan P, donc il en est de même de sa parallèle DC. Le quadrilatère ABCD a donc ses quatre angles droits; c'est un rectangle dans lequel les côtés opposés AB et CD sont égaux. Le plan P a donc

tous ses points à la même distance AB = l du plan P ; donc ces deux plans sont parallèles. C. Q. F. D.

Remarque. — Puisque DC = BA = l et que DC est perpendiculaire au plan P on constate que le plan Q a tous ses points à la *même* distance l du plan P . Si donc on envisage les deux plans P et Q au point de vue de la distance à l'un d'eux de tous les points de l'autre il y a *réciprocité* entre ces deux plans.

Corollaire. — Si deux plans P et Q sont parallèles, toute droite située dans l'un d'eux est parallèle à l'autre.

En effet, si cette droite est dans le plan P par exemple, elle a tous ses points à la même distance du plan Q ; donc elle est parallèle à ce plan. C. Q. F. D.

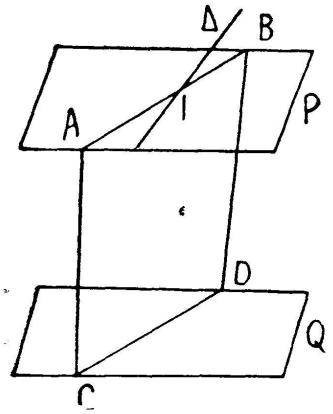

Fig. 5

11. — Théorème II. Les intersections de deux plans parallèles P et Q par un 3e plan R sont parallèles.

Démonstration. Par une droite AB du plan P et un point C du plan Q (fig. 5) faisons passer un plan R qui coupe le plan Q suivant une droite CD. Puisque la droite AB du plan P est parallèle au plan Q, l'intersection CD des plans R et Q est parallèle à la droite AB. C. Q. F. D.

Corollaire. Si deux plans P et Q sont parallèles, toute droite Δ qui rencontre l'un, rencontre l'autre.

Démonstration. Supposons que la droite Δ (fig. 5) rencontre le plan P au point I. Par cette droite et un point C du plan Q faisons passer un plan R.

Il coupe les plans P et Q suivant deux droites parallèles AB et CD ; or, la droite Δ rencontre AB au point I, donc elle ira rencontrer sa parallèle CD dans le plan R ; donc la droite Δ rencontre le plan Q. C. Q. F. D.

12. — Théorème III. Si deux plans P et Q sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

Démonstration. Supposons (fig. 4) que les plans P et Q soient parallèles. Si, en un point A du plan P, on mène la perpendiculaire à ce plan elle ira rencontrer le plan Q en un cer-

tain point B. Par la droite AB faisons passer un plan R ; il coupera les deux plans P et Q suivant deux droites parallèles AC et BD. Or, la droite AB , perpendiculaire au plan P, est perpendiculaire sur AC ; elle est par conséquent perpendiculaire à sa parallèle BD dans le plan. On voit ainsi que la perpendiculaire AB au plan P est perpendiculaire à une droite quelconque BD passant par son pied dans le plan Q ; donc, toute perpendiculaire au plan P est perpendiculaire au plan Q. C. Q. F. D.

Corollaire. Si deux plans P et Q sont parallèles à un même plan R, ces plans sont parallèles.

Démonstration. En effet, une perpendiculaire quelconque au plan R sera perpendiculaire à chacun des plans P et Q. Donc (th. I) ces plans sont parallèles. C. Q. F. D.

Remarque. Si deux plans parallèles P et Q ont un point commun M ces plans coïncident.

Démonstration. La perpendiculaire en M au plan P, par exemple, est également perpendiculaire au plan Q qui lui est parallèle ; il suit de là que les deux plans P et Q sont perpendiculaires à une même droite, au même point M ; donc ces plans coïncident. C. Q. F. D.

13. — Théorème IV. Par un point A, extérieur à un plan Q, on peut mener un plan P parallèle au plan Q, et on n'en peut mener qu'un seul.

Démonstration. Du point A (fig. 4) on peut mener la perpendiculaire AB sur le plan Q ; on peut ensuite mener au point A un plan P perpendiculaire sur AB. Ce plan sera parallèle au plan Q puisqu'ils seront l'un et l'autre perpendiculaires à la même droite AB.

Si on imagine par le point A un autre plan P′ parallèle au plan Q, les deux plans P et P′ parallèles au même plan Q seront parallèles entre eux, et à cause de leur point commun A ces plans coïncideront. Donc par le point A on peut mener un plan et un seul parallèle au plan Q. C. Q. F. D.

Corollaire. Si par un point A, extérieur à un plan Q, on mène des parallèles en nombre quelconque à ce plan, elles sont toutes situées dans le plan P parallèle au plan Q et passant par le point A.

Il suit de là que : Si deux angles ont leurs côtés parallèles 2 à 2 leurs plans sont parallèles.

Nous nous bornons à l'énoncé de ces propositions ainsi que des suivantes.

14. — 1°. Deux plans parallèles P et Q sont partout également distants.

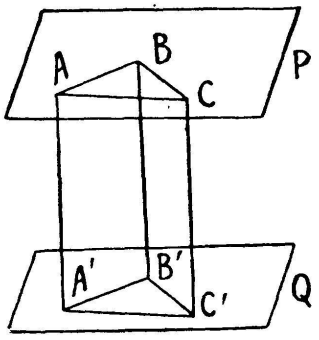

Fig. 6

Cela résulte des théorèmes I et III de ce paragraphe.

2°. Les portions de deux droites parallèles comprises entre deux plans parallèles P et Q sont égales.

3°. Enfin nous terminerons par le théorème suivant.

THÉORÈME V. Si deux plans P et Q sont parallèles, on peut, par une translation *rectiligne*, amener l'un d'eux en coïncidence avec l'autre.

Démonstration. Entre les deux plans donnés (fig. 6), plaçons 3 droites parallèles AA′, BB′ et CC′ non situées dans le même plan ; ces trois droites ont la même longueur l.

Si on fait subir au triangle ABC et par suite au plan P une translation rectiligne égale et parallèle à AA′, chacune des 3 droites AA′, BB′ et CC′ glissera sur elle-même ; et comme elles sont égales, les 3 points A, B et C viendront simultanément se placer sur les points A′, B′ et C′ du plan Q.

Dès lors le plan P coïncidera avec le plan Q.

C. Q. F. D.

V. HIOUX (Paris).