Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 10 (1908)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES PROJECTIONS DES DROITES PERPENDICULAIRES
Autor: Loria, Gino
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10966

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LES PROJECTIONS DES DROITES PERPENDICULAIRES

Il y a des questions de Géométrie descriptive qui peuvent se résoudre d'une seule manière et par un procédé simple, lorsque on emploie une certaine méthode de représentation, tandis que, si on se sert d'autres méthodes, on n'en vient à bout qu'en ayant recours à des artifices très variés. C'est dans cette condition particulière que se trouve la question traitée récemment dans cette *Revue* par MM. Lehr (T. IX, 1907, p. 119) et Majcen (Id., p. 460); elle se résoud en deux mots, si on se sert de la méthode de la projection centrale, tandis que, dans la méthode de Monge, elle n'a aucune de ces solutions qu'on dirait *nécessaires*. Qu'il me soit donc permis d'ajouter une troisième solution aux deux solutions découvertes par les géomètres cités. Elle est basée sur un raisonnement analogue à celui qui m'a fourni (*Periodico di matematica per l'insegnamento secondario*, III Série, T. 2, 1904-1905, p. 41; *Vorlesungen über darstellende Geometrie*, I. Band, Leipzig 1907, p. 54) la détermination des droites bissectrices des angles formés par deux droites données ou des plans bissecteurs des angles dièdres formés par deux plans donnés.

Comme cela est permis, je suppose que les droites r, r_1 dont on cherche la condition de perpendicularité se coupent en un point O et je m'appuierai sur les deux propositions suivantes, que tout le monde connaît :

a) La condition nécessaire et suffisante pour qu'un angle droit se projette orthogonalement sur un plan suivant un angle droit est que le plan de projection soit parallèle à un des côtés de l'angle.

b) Deux droites concourantes r, r_1 sont perpendiculaires entre elles lorsque elles se correspondent dans l'involution circulaire (ou orthogonale) Ω existant dans le faisceau de

rayons situé dans le plan $\omega \equiv r\, r_1$ et dont le centre est le point $O \equiv rr_1$.

Cela posé, soit (voyez la figure) $r\,(r', r'')$ et $r_1\,(r'', r''')$ les deux droites données; si on joint par une droite les points

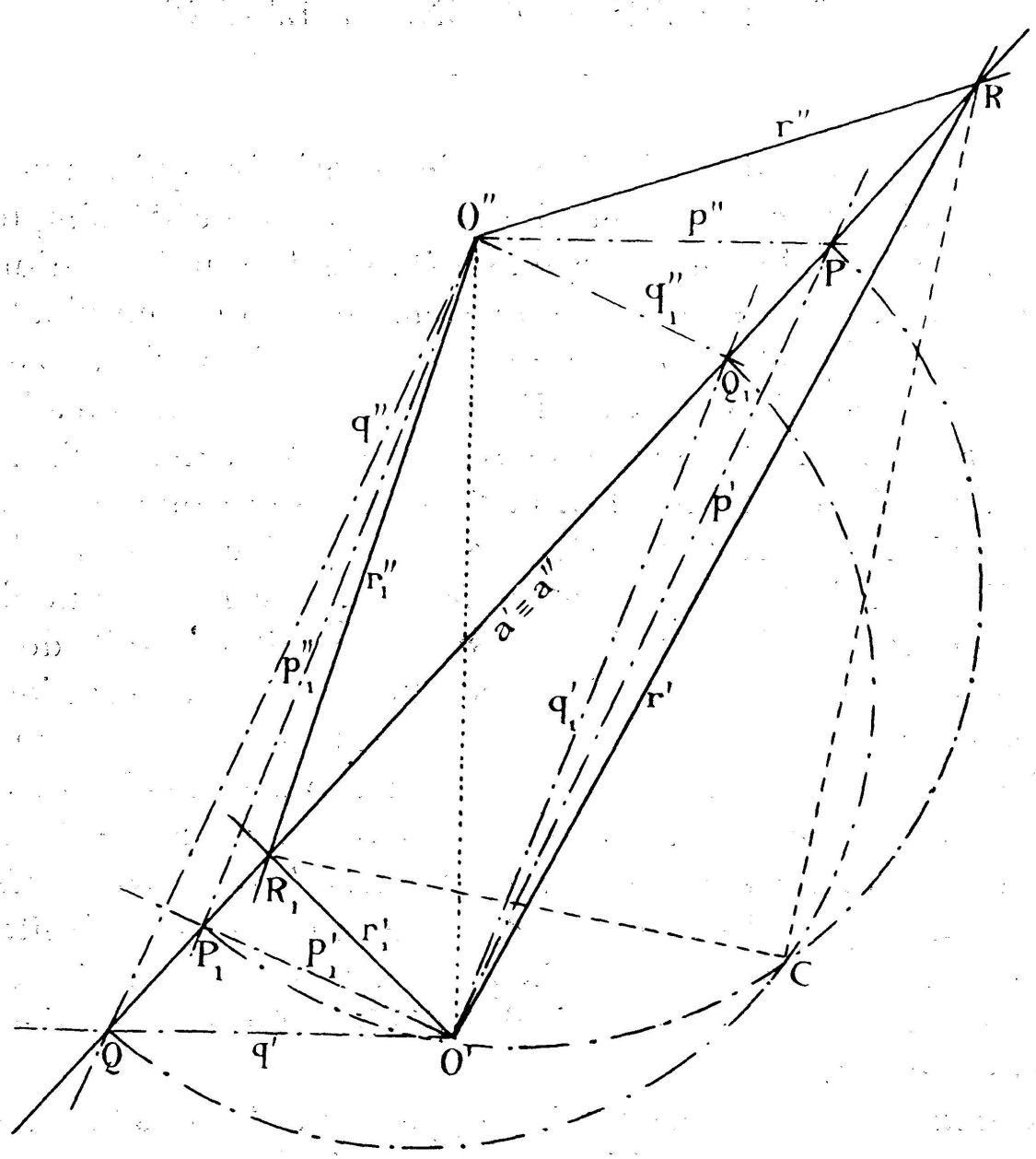

FIG. 1.

$r'\, r'' \equiv R$ et $r_1'\, r_1'' \equiv R_1$, on obtient l' « axe d'affinité » du plan ω, c'est-à-dire le lieu des points où se coupent les couples de projections des droites de ce plan.

Dans le faisceau (O, ω) considérons les deux droites p, p_1 qui sont perpendiculaires entre elles et dont la première est parallèle au plan horizontal; on sait que p'' est parallèle à la ligne de terre, ou bien (pour éviter le tracé de cette droite)

perpendiculaire à la droite O′ O″, tandis que p' est la droite qui joint O′ au point P ou p'' coupe l'axe d'affinité du plan donné. À cause du théorème *a*) p'_1 sera la normale menée par O′ à p' et on obtiendra p''_1 en joignant O″ au point P_1 ou p'_1 coupe l'axe d'affinité du plan ω.

D'une manière tout à fait analogue, on trouve les projections horizontales et verticales des deux droites q, q_1 menées par le point O dans le plan ω, qui sont perpendiculaires entre elles et dont la première est parallèle au plan vertical de projection.

Les deux couples de droites $p'\,p'_1$, $q'\,q'_1$ déterminent une involution (elliptique) qui est la projection Ω' de l'involution circulaire Ω; et les deux couples $p''\,p''$, $q''\,q''_1$ en déterminent une autre Ω'' qui est la projection verticale de la même involution Ω. Or, si on applique le théorème *b)*, on voit de suite que r et r_1 seront perpendiculaires entre elles lorque r″ et r'_1 seront des rayons correspondants dans l'involution Ω' (ou bien si r'' et r''_1 se correspondent en Ω'') et alors seulement.

Cette condition peut s'énoncer d'une autre façon. En effet, si on appelle Q et Q_1 les points $q'q''$ et $q'_1q''_1$, il est évident que pour la perpendicularité des droites r et r_1 il est nécessaire et suffisant que les points R, R_1 se correspondent dans l'involution (elliptique) déterminée par les couples PP_1, QQ_1; si, donc, le couple RR_1 ne sépare pas le couple PP_1 (ou le couple QQ_1) on peut tout de suite affirmer que les droites rr_1 ne sont pas perpendiculaires entre elles. Mais si cela n'a pas lieu, comme les segments PP_1, QQ_1 se séparent, les cercles dont ils sont les diamètres se coupent en deux points réels; soit C un de ces points; les angles $P\widehat{C}P_1$ et $Q\widehat{C}Q_1$ étant droits, il s'ensuit que *les droites r et r_1 seront perpendiculaires entre elles lorsque l'angle* $R\widehat{C}R_1$ *est lui-même droit, et seulement alors.*

Cette condition et les constructions nécessaires pour s'en servir ne me semblent pas plus compliquées que celles proposées par MM. Lehr et Majcen et les principes que j'ai appliqués ne me paraissent pas plus difficiles et moins connus que ceux sur lesquels ils se sont appuyés; c'est ce qui me

décide à publier cette courte note. Pour terminer je crois utile de faire remarquer qu'elle semble confirmer l'opinion que *les solutions les plus naturelles dans la base et les plus simples dans l'exécution de questions de Géométrie descriptive (élémentaire) s'obtiennent par l'emploi des théories de la Géométrie de position.*

Gino LORIA (Gênes).

SUR LE CHANGEMENT DE VARIABLE DANS LES DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR

La détermination directe de la $m^{\text{ième}}$ dérivée, si importante dans les applications de la série de Taylor, spécialement pour la discussion du reste, se heurte à des difficultés sérieuses qui ne peuvent guère être vaincues que dans quelques cas particuliers. On me permettra de citer ici, comme pouvant quelquefois rendre de bons services dans ce genre de question, une formule aussi simple que peu connue.

Soient une fonction $y = f(x)$ de la variable x, $F(y)$ une *fonction de fonction,* suivant la terminologie en usage dans les éléments du Calcul différentiel. On demande d'exprimer la $m^{\text{ième}}$ dérivée par rapport à x, $\frac{d^m}{dx^m} F(y)$, par des dérivées relatives à la variable y. La réponse à ce problème est contenue dans la formule

$$\frac{d^m}{dx^m} F(y) = \frac{\partial^m}{\partial y^m} F(y)\, \varphi'(y) \left(\frac{y-f}{\varphi - x}\right)^{m+1}, \qquad (1)$$

dont voici la signification. La fonction inverse de f est désignée par φ, de sorte que l'équation $y = f(x)$ se résout ainsi $x = \varphi(y)$; en outre, il faut au second membre de (1), calculer d'abord les dérivées en y, sans toucher à x, puis remplacer dans le résultat y par $f(x)$, ou x par $\varphi(y)$.