SUR UN CAS DE DISCONTINUITÉ

Autor(en): **Bioche, Ch.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1909)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-11860

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

atmosphérique dans les conditions initiales de 0° centigrade et 1 atmosphère de pression. Les températures extrêmes sont choisies être 0° et 100° centigrade. On trouvera dans le tableau ci-après pour chaque opération les températures aux quatre angles, indiquées en degrés centigrade (t au lieu de T), le travail Q en grammes-calories et le rendement. Nous avons commencé par calculer le maximum de Q pour les cycles II, III et VI qui sont seuls à en présenter. Le plus élevé de ces maxima se trouve être 1,8 cal. ; pour les cycles n'ayant pas de maximum fini du travail, le calcul a été effectué en supposant comme travail prescrit à effectuer cette même valeur de 1,8 cal. Remarquons enfin que pour le cycle VI on a encore calculé le cas du maximum de rendement.

Cycle.	t_0	t_1	t_2	t_3	Travail.	Rendement.
I Carnot.	100°	—	0°	—	1,8	0,27
II adiabatique-isochore	100°	46°	0°	46°	1,3 (max)	0,14
III adiabatique-isobare.	100°	46°	0°	46°	1,8 (max)	0,14
IV isotherme-isochore .	100°	—	0°	—	1,8	0,27
régénérateur . . .					$q = 16,9$	
V isotherme-isobare. .	100°	—	0°	—	1,8	0,27
régénérateur . . .					$q = 23,8$	
VI isochore-isobare . .	100°	46°	0°	46°	0,534 (max)	0,0259
	100°	42°	0°	50°	0,530	0,0261 (max)

H. Veillon (Bâle).

SUR UN CAS DE DISCONTINUITÉ

---

1. — M. Darboux a écrit, au début de son important mémoire sur les fonctions discontinues[1] : « Bien des points que l'on regarderait comme évidents, ou que l'on accorderait dans les applications de la Science aux fonctions usuelles, doivent

[1] *Annales de l'Ecole Normale*, 1875.

être soumis à une critique rigoureuse dans l'exposé des propositions relatives aux fonctions les plus générales. »

Peu de temps après, un mathématicien hollandais M. Cohen STUART, dans un article cité par le *Bulletin* de M. Darboux (1880, 2e partie, p. 175) disait : « Beaucoup de mathématiciens admettent tacitement, et quelques-uns l'énoncent en termes formels, que si x variant d'une façon continue $f(x)$ change subitement de valeur, cela implique toujours pour la fonction dérivée $f'(x)$ une rupture de continuité... Un exemple propre à montrer que cela n'est pas vrai d'une manière absolument générale est fourni par la discontinuité de

$$f(x) = e^{-e^{\frac{1}{x}}}$$

2. — Je crois qu'il est bon de rappeler l'attention sur des remarques de ce genre. Je voudrais aussi ajouter quelques observations.

On peut facilement former des fonctions plus simples que celle qu'indique M. Cohen Stuart, par exemple

$$f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$$

les fonctions que je viens de citer admettent une dérivée dans chacun des intervalles $(-\infty, -\varepsilon)$ et $(+\varepsilon, +\infty)$; l'expression générale de la dérivée tend vers 0 lorsque x tend vers 0, soit par valeurs positives, soit par valeurs négatives, de sorte que, si on convient d'attribuer à cette dérivée la valeur 0 pour $x = 0$, on peut dire que la fonction considérée a une dérivée continue bien que cette fonction soit discontinue. Cependant on peut objecter qu'il a fallu pour cela introduire dans la définition de la fonction dérivée une convention, d'ailleurs très naturelle, mais contenant comme toute convention une part d'arbitraire. Il peut donc être intéressant d'indiquer un exemple, très simple, ne prêtant pas à cette objection.

3. — Considérons la fraction

$$f(x) = \text{arc tg}\, x\ ;$$

convenons, pour la définir complètement, de prendre pour $f(x)$ le plus petit arc positif ayant pour tangente x. La fonction est continue dans chacun des intervalles $(-\infty, -\varepsilon)$ et $(+\varepsilon, +\infty)$; elle admet une dérivée

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

et celle-ci est évidemment continue pour toute valeur de x sans qu'on ait à faire intervenir aucune convention.

Si on définit arc tg x comme je viens de le dire et si on forme la fonction

$$F(x) = \frac{\pi}{4} x + \text{arc tg } x - \frac{\pi}{2},$$

on voit que cette fonction a une dérivée continue, et d'autre part on a

$$F(-1) = -\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$F(+1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 0,$$

sans que la dérivée s'annule pour une valeur de x comprise entre -1 et $+1$. Il n'est donc pas inutile, si on veut donner du théorème de Rolle un énoncé ne prêtant pas à objection, de spécifier dans l'énoncé que la fonction considérée doit être continue, car le théorème de Rolle ne s'applique pas à une fonction qui ne serait pas continue.

Ch. Bioche (Paris).