UNE LEÇON DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE SUR L'EMPLOI DES QUANTITÉS IMAGINAIRES

Autor(en): **Schoute, P.-H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1909)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-11868

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

polygone inscrit fournit un maximum de la surface et qu'il n'y en a pas d'autres; des minima sont obtenus quand un ou plusieurs côtés se placent en ligne droite.

Ces conclusions ne sont pas modifiées si on autorise des dispositions concaves; mais dans le cas des formes étoilées, — qui exige la généralisation de la notion de surface, — on aura des maxima et minima correspondant aux divers cas d'inscription. La description et le classement de tous les résultats est un problème sans doute fort difficile et qui sort du cadre de cet article.

C. Cailler (Genève).

UNE LEÇON DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE SUR L'EMPLOI DES QUANTITÉS IMAGINAIRES

Problème. On donne dans le plan horizontal un cercle c dont le centre M se trouve sur la ligne de terre LT et une droite d perpendiculaire à LT. Par le point A de c, situé sur LT, on mène un plan quelconque α normal au plan horizontal, coupant c pour la seconde fois en B et d en C; puis on s'imagine en α le cercle c_α dont BC est un diamètre. Construire en un point quelconque P de c_α le plan tangent π à la surface S, lieu de c_α quand α tourne autour de la droite a du plan vertical, normale en A à LT.

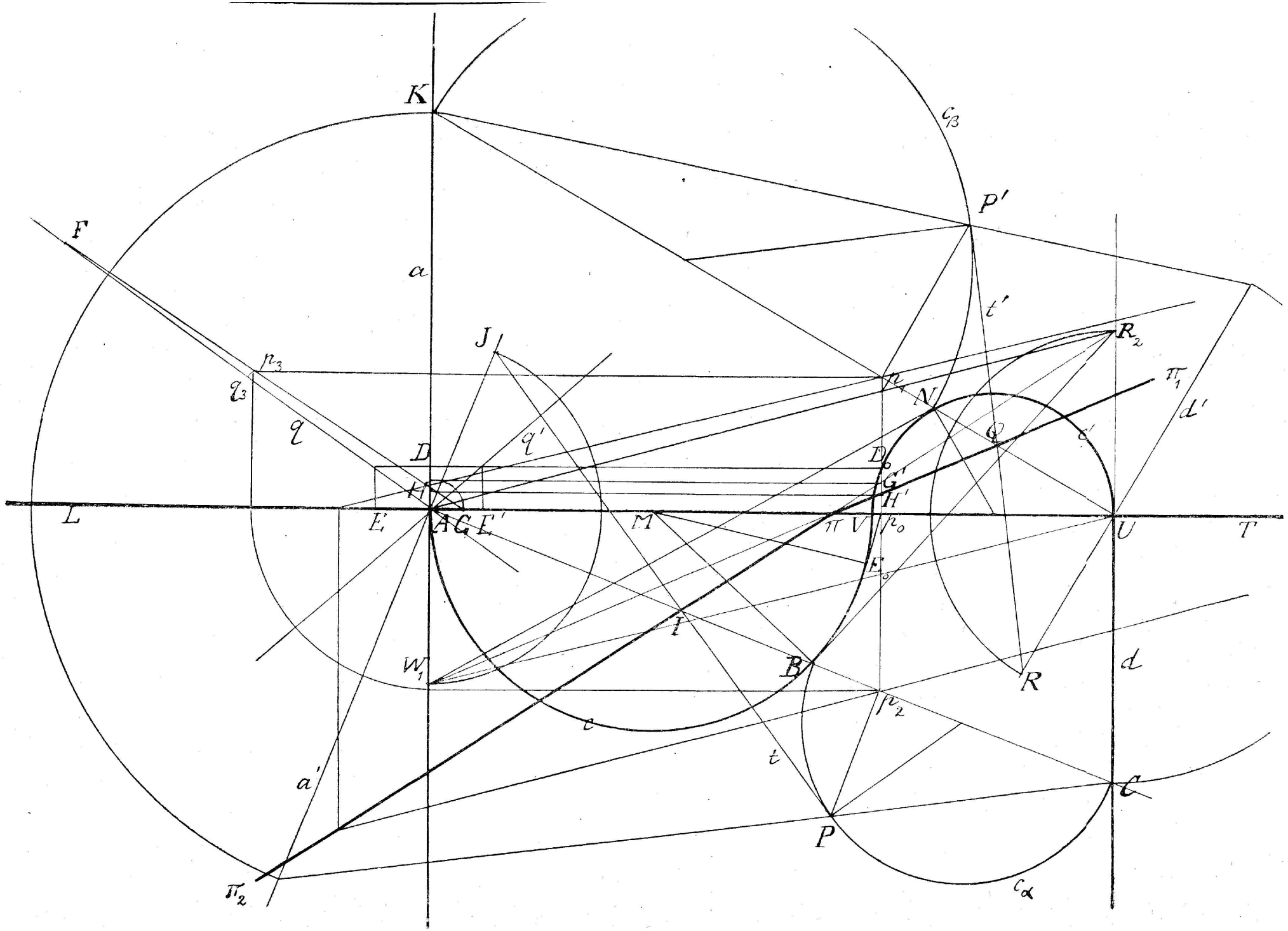
1. On trouve le plan cherché π à l'aide de la tangente t en P à c_α et la tangente en P à une autre courbe plane de S passant par P. Dans la première et la seconde des trois solutions qui suivent, nous choisissons pour le plan de cette seconde courbe successivement le plan de front par P et le plan par P et d. Il sera alors facile de déterminer cette tangente dans les deux cas indiqués, dès qu'on connaît l'ordre de S et la nature de sa section avec le plan α_∞ à l'infini. Enfin la nature particulière de la surface S nous suggérera une troisième solution, la plus simple de toutes.

2. *Ordre de la surface* S. — Le plan horizontal ne contient

de la surface S que le cercle c et la droite d; donc S est une surface cubique.

Section de S avec α_∞. — La surface S doit contenir le cercle imaginaire à l'infini c_∞ commun à toutes les sphères, car un plan quelconque α par a contient un cercle c_∞ et donc les deux points d'intersection avec c_∞. Ainsi la section cubique de S avec α_∞ se décompose en c_∞ et une droite d_∞, évidemment la droite à l'infini du plan de front par A complétant l'axe a du faisceau de plans α à un cercle.

3. *Première solution.* — La section cubique de S avec le plan de front par P se décompose en d_∞ et une conique. Comme les deux plans de projection sont des plans de symétrie de S, cette conique a pour centre et pour axes les traces du plan de front par P avec LT et les deux plans de projection. Cette conique se projette en vraie grandeur sur le troisième plan de projection que nous supposons normal à LT en A; de cette projection A est donc le centre, tandis que a et LT en forment les axes. Nous déterminons les longueurs de ces axes. Le plan vertical contient de S la droite a et le cercle c'; le point d'intersection D_0 de c' avec le plan de front par P détermine l'axe AD sur a. Les points d'intersection du plan de front par P avec le cercle c dans le plan horizontal étant imaginaires, la conique en question est une hyperbole dont l'axe imaginaire est égal à la tangente p_0E_0 à c, multipliée par $\sqrt{-1}$. En portant sur LT de part et d'autre de A les segments $EA = AE' = p_0E_0$ et en construisant les diagonales q, q' des rectangles sur AD, AE et AD, AE' on obtient les asymptotes de l'hyperbole. Le segment de la tangente à l'hyperbole mené par la projection p_3 de P et compris entre ces asymptotes ayant p_3 pour point milieu, on détermine cette tangente de la manière suivante. Menons par p_3 une parallèle à q' coupant q en q_3 et prenons sur q $q_3F = Aq_3$; alors p_3F est la tangente cherchée. Les points d'intersection G et H de cette tangente avec LT et a font connaître les points G' et H' des traces horizontale et verticale de π. A l'aide du point d'intersection I de t avec le plan horizontal on trouve donc d'abord la trace horizontale $G'I = \pi\pi_2$ et ensuite la trace verticale $\pi H' = \pi\pi_1$.


K
F
a
J
p_3
q_3
q
q'
D
H
L
E
A
G
E'
M
c_β
P'
t'
R_2
π_1
N
d'
Q
c'
D_0
G'
H'
π
V
p_0
U
T
E_0
I
W_1
B
R
d
p_2
c
t
a'
C
P
π_2
c_α

4. *Seconde solution.* — Le plan β, mené par P et la droite d, coupe S en une cubique se décomposant en d et une conique qui doit être un cercle, parce qu'elle doit contenir les deux points d'intersection de β avec c_∞. Ce cercle doit admettre KN comme diamètre, le plan vertical étant un plan de symétrie de S; nous l'avons rabattu comme c_β sur le plan vertical avec le point P en P'. Le plan π est donc déterminé par la tangente $t =$ PI en P à c_α et la tangente $t' =$ P'Q en P' à c_β. A l'aide du point R où t' rencontre d on détermine la trace horizontale $IR_2 = \pi_2\pi$; alors on trouve la trace verticale $\pi Q = \pi\pi_1$ à l'aide du point Q.

5. *Remarques.* — I. La seconde solution a révélé une seconde génération de la surface S semblable à la première. Si l'on suppose que dans le plan vertical on donne le cercle c' et la droite a, et qu'en chaque plan β, normal au plan vertical passant par le point U de c' situé en LT, on construit le cercle c_β dont KN est un diamètre, on retrouve la surface S.

II. Dans le cas représenté par la figure le plan de front mené par P coupe c en des points imaginaires, c' en des points réels, p_0 étant à droite du point V commun à c et c'. Si p_0 est à gauche de V, les axes de l'hyperbole de la première solution intervertissent leurs caractères de réalité Si p_0 coïncide avec V, l'hyperbole, dans le plan de front, dégénère en ses deux asymptotes.

III. Il est évident que les cercles c_α dont S est le lieu, coupent la droite a aux mêmes deux points imaginaires. Car on a $AB . AC = AU . AV =$ constante, ce qui prouve que tous les cercles c_α passent aux points de a situés de part et d'autre de A à la distance égale à $i\sqrt{AU . AV}$, où $i = \sqrt{-1}$. D'ailleurs, si les points d'intersection de c_α avec a variaient avec l'inclinaison du plan α sur le plan vertical, la surface S devrait contenir a pour deux raisons différentes, d'abord parce que a fait partie de c_α, si l'on suppose que le plan α par a est normal au plan vertical, et ensuite parce que les cercles c_α engendrent cette droite par leurs couples de points d'intersection, ce qui exigerait que l'ordre du lieu S surpasse trois, contraire à ce que nous avons trouvé au début. Semblablement les cercles c_β coupent la droite d aux deux mêmes

points imaginaires, situés de part et d'autre du point U à la distance $i\sqrt{UV.UA}$. Donc S a quatre points doubles imaginaires, ce qui nous permet de rendre compte de la position des vingt-sept droites de S. Parmi ces vingt-sept droites, les six arêtes du tétraèdre, dont les quatre points doubles sont les sommets, comptent quatre fois, et les trois droites restantes sont coplanaires. Ces trois droites sont d_∞ et les deux droites situées dans le plan de front passant par V.

IV. Si tous les cercles c_α coupent a aux mêmes points, deux de ces cercles se trouvent sur une même sphère. En appliquant cette remarque aux couples de cercles c_α infiniment voisins, on trouve que la surface S est touchée dans tous les points d'un même cercle c_α par une même sphère, ce qui explique que ces cercles c_α sont des lignes de courbure. De la même manière on démontre que les cercles c_β forment la seconde série des lignes de courbure. Donc les droites t et t' doivent être normales l'une à l'autre; nous en omettons la vérification.

V. Si la surface S est touchée suivant le cercle c_α par une sphère, les plans tangents de S aux points P de c_α enveloppent un cône de révolution et passent donc par le sommet de ce cône. Cette remarque mène à la solution la plus simple du problème qui nous occupe.

6. *Troisième solution.* — Les plans tangents à S aux points B et C du plan horizontal sont perpendiculaires à ce plan suivant la tangente en B à c_α et suivant d; le point commun à ces deux droites est le sommet du cône enveloppé par les plans tangents de S aux points de c_α. Comme ce sommet se trouve dans le plan tangent π, il doit coïncider avec le point R_2 trouvé dans la seconde solution. En remplaçant les cercles c_α par les cercles c_β, on trouve de la même manière que le point d'intersection W_1 de a avec la tangente en N à c, coïncidant avec le point J commun à t et a, est un point de la trace verticale de π. Donc π est le plan W_1PR_2 et les traces se retrouvent en menant par P une droite parallèle à W_1R_2, etc.

7. *Conclusion.* — Inutile d'ajouter que cette petite étude ne poursuit qu'un but pédagogique. En effet, la surface S est la cyclide cubique de Dupin qu'on obtient en transfor-

mant le tore à points doubles imaginaires par l'inversion, le centre d'inversion étant un point de la surface du tore. Ainsi les deux groupes de cercles du tore situés dans les plans par l'axe et dans les plans perpendiculaires à l'axe se transforment dans les deux groupes des cercles c_α et c_β.

Pour plus de développements concernant les cyclides, nous renvoyons aux livres magistraux de MM. Darboux et Reye.

P.-H. Schoute (Groningue).

SUR UNE INTRODUCTION PREMIÈRE DES LOGARITHMES

1. — Dans un ouvrage récent, M. Klein[1] suggère une première introduction des Logarithmes qui se rapproche du procédé employé depuis longtemps dans la théorie des fonctions. Cette idée, déjà signalée d'ailleurs par M. J. Tannery[2], me semble avoir un intérêt tout particulier, car elle permet d'éviter les nombreuses inexactitudes qui se trouvent dans l'exposition dite élémentaire de la théorie des logarithmes.

En outre, il sera souvent nécessaire d'introduire les logarithmes bien avant de donner quelques notions des intégrales définies, sans avoir toujours recours au théorème du changement des variables dans toute sa généralité et plus particulièrement du théorème que voici :

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \int_{x_1}^{xx_1} \frac{dx}{x} .$$

Je veux donc indiquer ici une marche que l'on peut suivre dans cette partie de l'enseignement.

2. — Considérons l'hyperbole K (fig. 1) dont l'équation est :

$$xy = 1 ,$$

[1] *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.* I. Cours autographié; Leipzig, 1908.
[2] *Notions de mathématiques.* Paris, 1903.