Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 11 (1909)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE BASÉE SUR LE GROUPE DES DÉPLACEMENTS

Autor: Rousseau, Th.

Kapitel: Plan.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-11850

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

une transposition T autour d'une charnière Δ, perpendiculaire sur AA′ en son milieu. B et C sont venus en B_1 et C_1. On peut maintenant amener B_1 en B′ par une rotation autour de la perpendiculaire Δ' à A′B′ et $A'B_1$, au point A′. C_1 vient alors en C_2. Enfin, une rotation autour de A′B′ amène C_2 en C_1. Comme les deux charnières Δ' et A′B′ sont concourantes, on peut remplacer le produit des deux dernières rotations par une seule, R_1, autour d'une charnière Δ_1 passant par A′, et on a $D = TR_1$.

49. — Applications. *Définition.* J'appelle *triangle* la figure formée par trois portions de droite ayant deux à deux une extrémité commune.

Hauteurs, médianes, bissectrices. Triangle isocèle.

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle soit isocèle, est que la médiane et la hauteur issues d'un sommet soient confondues.*

Démonstration par une transposition.

Plan.

50. — *Définitions préliminaires.* Je dis que l'espace est en *mouvement* s'il est soumis à un ensemble continu de transformations, comprenant la transformation identique.

Le mouvement est dit *à un, deux, ...n paramètres,* suivant que cet ensemble est à une, deux, ...n dimensions.

Si le mouvement est à un paramètre, ce paramètre t s'appelle le *temps mathématique.*

Si les transformations de l'ensemble sont des déplacements, on dit que toute figure qui participe au mouvement est de *forme invariable.*

Je dirai qu'un mouvement à un paramètre est *limité*, quand l'ensemble des transformations qui le définit est limité. Il y a alors deux positions extrêmes F_0 et F_1 pour toute figure qui participe au mouvement.

La position F_0 qui correspond à la première valeur du paramètre t s'appelle *position initiale* et l'autre F_1 la *position finale.*

Remarquons que tout mouvement limité à un paramètre définit une transformation, savoir celle qui fait correspondre à la configuration initiale E_0 de l'espace la configuration finale E_1.

On dit que deux mouvements limités sont *équivalents* quand ils définissent la même transformation.

J'appelle *mouvement de rotation* le mouvement défini par un ensemble continu de rotations.

51. — *Définition.* J'appelle *plan* la figure engendrée par une semi-droite ox, perpendiculaire à une droite zz', dans un mouvement de rotation autour de zz'. Le plan est une surface, car c'est

un ensemble ponctuel à deux dimensions. Le plan et la droite zz' sont dits *perpendiculaires*.

Remarque. Le plan est complètement défini par la droite zz' et le point o.

52. — Théorème I. *Deux plans quelconques sont égaux.*

Soient deux plans P et P_1 définis par la droite zz' et le point o, la droite z_1z_1', et le point o_1. Il suffit de faire coïncider zz',o et z_1z_1',o_1, pour que les deux plans coïncident.

53. — Théorème II. *Toute transposition autour d'une droite passant par le pied de la perpendiculaire à un plan, et située dans ce plan, retourne le plan sur lui-même.*

54. — Théorème III. *Dans un mouvement de rotation autour de la perpendiculaire à un plan, le plan coïncide avec sa position primitive.* — On dit qu'il glisse sur lui-même.

55. — Théorème. *Par deux droites concourantes on peut toujours faire passer un plan.*

Car on peut leur mener une perpendiculaire commune.

56. — Théorème. *Le lieu des points équidistants de deux points donnés est le plan perpendiculaire au milieu de la droite qui joint les deux points.*

57. — Théorème. *Toute droite qui a deux points dans un plan y est toute entière contenue.*

Soit le plan P perpendiculaire en O à zz'.

1° Soient d'abord deux points A et B équidistants de O dans le plan P. Si I est le milieu de AB, la droite OI est bissectrice de l'angle AOB et nous savons qu'elle est perpendiculaire à zz'. Donc I est dans le plan P.

Prenons deux points HH' sur zz' tels que OH = OH'. On a évidemment AH = AH', BH = BH' et aussi AH = BH, car on peut amener AH sur BH par une rotation. Donc dans les triangles isocèles ABH, ABH', les médianes HI, H'I sont perpendiculaires sur AB. De plus elles sont égales puisque I est dans le plan P. Donc, par une rotation autour de AB on peut amener H sur H'. Mais dans cette rotation un point M quelconque de AB ne bouge pas, ce qui prouve que MH = MH' et par suite que le point M est dans le plan P.

2° Soient maintenant deux points quelconques A et B du plan P, I le pied de la perpendiculaire abaissé de O sur AB, B' le point de AB tel que IB' = IA et joignons OB'. Soit z_1z' la perpendiculaire commune à OA et OB' et P_1 le plan perpendiculaire à z_1z_1' au point O. Ce plan contient la droite AB', car les points A et B' sont équidistants de O. Donc il contient aussi le point B et la droite OB. Par suite la droite z_1z_1' perpendiculaire à OA et OB se confond avec zz', et le plan P_1, qui contient AB, avec le plan P.

58. — Théorème. *Toute droite d'un plan, qui passe par le pied de la perpendiculaire au plan, partage le plan en deux régions.*

Soit P le plan perpendiculaire en O à zz', xx' la droite considérée. Considérons l'ensemble P_1 formé des points engendrés par la semi-droite Ox dans le mouvement de rotation qui amène Ox sur Ox', pour la première fois ; puis l'ensemble P_2 formé des points engendrés par Ox' dans le même mouvement. Je dis que ces deux ensembles sont des *régions*, c'est-à-dire que si M et M′ sont deux points du même ensemble, on peut passer de M à M′ par un chemin continu sans sortir de cet ensemble. Il suffit d'amener OM sur OM′, ce qui amène M en M_1, sur OM′, puis de suivre le chemin M_1M' sur OM′. De plus, ces régions sont séparées par la droite $x'x$. En effet, si M est dans le premier et M′ dans le second ensemble et si un mobile N va de M à M′ sur une ligne continue C, la semi-droite ON se déplace d'une manière continue et par suite traverse xx'; donc N traverse aussi xx'.

59. — Théorème. *Deux plans qui ont en commun deux droites concourantes, dont l'une partage les deux plans en deux régions, coïncident.*

Soient PP′ deux plans contenant les deux droites D et Δ, concourantes en o. Supposons que D partage P et P′ en deux régions P_1, P_2 et P'_1, P'_2. Alors Δ est partagée par le point o en deux semi-droites Δ_1, Δ_2 dont l'une est dans P_1 et P'_1, et l'autre dans P_2 et P'_2.

Je dis que tout point M d'un des plans est dans l'autre. Supposons que M soit dans P et par exemple dans la région P_2. Soit M′ un point quelconque de Δ_1, la droite MM′ coupe D. Donc elle est toute entière dans P′, et le point M est dans P′.

60. — Théorème. *Par chaque point d'un plan on peut mener à ce plan une perpendiculaire et une seule.*

Soit P le plan perpendiculaire en o à la droite zz', o_1 un point quelconque de ce plan. Menons par o_1 une droite quelconque Δ dans le plan P. Soit o_1z_1 la perpendiculaire à D et à oo_1, P_1 le plan perpendiculaire à o_1z_1 au point o_1. Les plans P et P_1 passent tous deux par oo_1 et D. Or D partage P et P_1 en deux régions puisqu'elle passe par o et par o_1. Donc les deux plans sont confondus, et o_1z_1 est perpendiculaire en o_1 au plan P.

Toute autre perpendiculaire o_1z_1 au plan P au point o_1 coïncide avec o_1z_1, car elle doit être perpendiculaire à oo_1 et à D.

Remarque. Un plan P peut être considéré comme engendré par une perpendiculaire ox à une droite zz', perpendiculaire en un point quelconque o du plan P.

61. — *Corollaire I.* Toute droite d'un plan partage ce plan en deux régions. Chacune d'elles s'appelle un *semi-plan*. La droite s'appelle le *bord* ou l'*arête* du semi-plan.

62. — *Corollaire II.* On peut toujours faire coïncider deux plans PP′ de façon à amener un point o de P sur un point o' quelconque de P′, et une droite D passant par o dans P sur une droite D′ quelconque passant par o' dans P′.

63. — *Corollaire III.* Une transposition autour d'une droite quelconque d'un plan retourne le plan sur lui-même.

64. — Théorème. *Par deux droites concourantes on peut faire passer un plan et un seul.*

Nous avons déjà vu qu'on en peut faire passer un. Tout plan passant par les deux droites données D et D′ est perpendiculaire à la droite oz, perpendiculaire commune à D et D′. Il n'y en a donc qu'un seul.

65. — *Corollaire I.* Par une droite et un point on peut faire passer un plan et un seul.

66. — *Corollaire II.* Par trois points on peut faire passer un plan et un seul.

67. — Théorème. *Deux plans qui ont un point commun se coupent suivant une droite.*

Soit P et P′ deux plans ayant en commun le point o, oz et oz' les perpendiculaires à P et P′ en o. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point M soit sur l'intersection est que la droite OM soit perpendiculaire à oz et oz'.

68. — Théorème. *Tout plan partage l'espace en deux régions.*

Soit P le plan perpendiculaire en o à une droite zz', ox une semi-droite quelconque de P, Q le semi-plan zz', ox; il est partagé par ox en deux quarts de plan Q_1 et Q_2.

Tout l'espace peut être considéré comme engendré par Q dans un mouvement de rotation autour de zz'. En effet, un point M quelconque de l'espace détermine avec zz' un semi-plan Q′ qui coupe P suivant une semi-droite ox'. Q′ est donc une des positions de Q.

Dès lors les points de l'espace se partagent en deux ensembles E_1 et E_2, suivant qu'ils sont rencontrés par Q_1 ou par Q_2. En raisonnant comme pour le théorème du n° 58, on voit facilement que E_1 et E_2 sont continus, et par suite constituent deux régions de l'espace, que ces régions sont distinctes et séparées par le plan P.

69. — Théorème. *Etant donnés un plan P, une droite D dans ce plan et deux points* o *et* o′ *sur cette droite, il existe un déplacement qui ramène le plan P sur sa position primitive, sans le retourner, de façon que la droite D ait glissé sur elle-même et que le point* o *soit venu en* o′.

Il suffit de faire une transposition autour de la perpendiculaire D à oo' en son milieu, et située dans le plan P, suivie d'une autre transposition autour de la perpendiculaire D′ au point o' à la même droite oo' et située également dans le plan P.

Définition. J'appelle un tel déplacement, un *glissement plan rectiligne.* Si on fait varier oo' à partir de o, on obtient un mouvement que j'appelle un mouvement de *glissement plan rectiligne;* $oo' = a$ s'appelle l'*amplitude* du mouvement limité qui amène o en o'.