SUR UNE INTÉGRALE AUX DIFFÉRENCES

Autor(en): **Broggi, Ugo**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1909)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-11856

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$p^{(n-1)} > v^{(n-1)}$; et, comme la différence $p^{(n-1)} - v^{(n-1)}$ est un nombre pair, on aurait

$$p^{(n-1)} \geqq v^{(n-1)} + 2 .$$

Cette dérivée est un polynôme du 1er degré qui aurait au moins deux racines positives ! L'hypothèse $p > v$ est donc fausse et le théorème de Descartes démontré.

C. JACCOTTET (Lausanne).

SUR UNE INTÉGRALE AUX DIFFÉRENCES

M. MARKOFF[1] détermine la valeur de l'intégrale aux différences finies

$$\sum_{(r)}^{(0 \ldots \infty)} x^r \Phi(r)$$

dans le cas où $\Phi(r)$ est une fonction rationnelle et entière de r ; il l'obtient par l'application répétée, et quelque peu laborieuse, du procédé d'intégration finie par parties. Nous nous proposons d'indiquer ici une méthode plus rapide, $\Phi(r)$ étant d'ailleurs supposé quelconque.

Posons

$$1 + x + \ldots + x^n = \mathrm{H}_n .$$

On a évidemment

$$\sum_{(r)}^{(0, 1, \ldots n)} r(r-1) \ldots (r-\rho+1) x^r = x^\rho \frac{d^\rho \mathrm{H}_n}{dx^\rho} , \quad \rho = (0, 1, 2, \ldots)$$

et, si l'on multiplie les deux membres de l'identité par $\frac{1}{\rho!} \Delta^\rho \Phi(0)$

$$\sum_{(r)}^{(0, 1, \ldots, n)} \binom{r}{\rho} x^r \Delta^\rho \Phi(0) = \frac{x^\rho}{\rho!} \frac{d^\rho \mathrm{H}_n}{dx^\rho} \Delta^\rho \Phi(0) .$$

---

[1] *Differenzenrechnung*, Leipzig, 1896.

Or on sait, par le calcul des différences finies, que

$$\binom{r}{0}\Phi(0) + \binom{r}{1}\Delta\Phi(0) + \binom{r}{2}\Delta^r\Phi(0) + \ldots = \Phi(r) ;$$

en attribuant à ρ les valeurs 0, 1, 2, ... et en additionnant membre à membre, on obtient la relation cherchée

$$\sum_{(r)}^{(0,1,\ldots,n)} x^r \Phi(r) = \sum_{\rho}^{(0,1,2\ldots)} \frac{x^\rho}{\rho!} \frac{d^\rho H_n}{dx^\rho} \Delta^\rho \Phi(0) . \tag{1}$$

Il est aisé d'en déduire une autre, à laquelle M. STUDNICKA[1] parvient en opérant sur les symboles opératoires Δ comme sur des quantités, et en supposant que

$$(1 + \Delta)^n \cdot f = f + n\Delta f + \binom{n}{2}\Delta^2 f + \ldots$$

Il est superflu d'ajouter qu'un tel procédé, bien que probablement légitime, laisse beaucoup à désirer au point de vue de la rigueur.

L'expression

$$\sum_{(r)}^{(0,1\ldots,n)} \binom{r}{\rho} x^r = \frac{x^\rho}{\rho!} \frac{d^\rho H_n}{dx^\rho}$$

donne pour $x = 1$

$$\left(\frac{d^\rho H_n}{dx^\rho}\right)_{x=1} = \rho! \left\{ \binom{\rho}{\rho} + \binom{\rho+1}{\rho} + \ldots + \binom{n}{\rho} \right\} = \rho! \binom{n+1}{\rho+1} .$$

La relation (1) devient pourtant, dans le cas considéré,

$$\sum_{(r)}^{(0,1,\ldots n)} \Phi(r) = \sum_{(\rho)}^{(0,1\ldots)} \binom{n+1}{\rho+1} \Delta^\rho \Phi(0) , \tag{2}$$

ce qui est bien la formule annoncée.

Supposons au contraire $x < 1$. On a

$$\lim_{n=\infty} H_n = \frac{1}{1-x} , \quad \lim_{n=\infty} \frac{d^\rho H_n}{dx^\rho} = \frac{d^\rho}{dx^\rho}(\lim H_n) = \frac{\rho!}{(1-x)^{\rho+1}} .$$

[1] *Prager Berichte*, 1871.

et il résulte alors de (1), que

$$\sum_{(r)}^{(0,1,\dots\infty)} x^r \Phi(r) = \frac{1}{1-x} \sum_{(\rho)}^{(0,1\dots)} \left(\frac{x}{1-x}\right)^\rho \Delta^\rho \Phi(0) \ . \tag{3}$$

L'étude de la convergence de la série

$$\Phi(0) + x\Phi(1) + x^r \Phi(r) + \dots ,$$

considérée pour la première fois par Abel, se rattache pour (3) à celle des différences de la fonction $\Phi(r)$ au point $r = 0$.

Si l'on a $|x| < \frac{1}{2}$, il suffit de supposer que toutes les différences $\Delta^\rho \Phi(0)$ soient finies pour que le deuxième membre de (3) converge. Car il est alors possible d'indiquer deux grandeurs finies M et N, telles que

$$|\Delta^\rho \Phi(0)| \leq M$$

$$\frac{1}{1-x} \sum_{(\rho)}^{(0,1,\dots)} \left(\frac{x}{1-x}\right)^\rho \Delta^\rho \Phi(0) \leq \frac{M}{1-x} \sum_{(\rho)} \left(\frac{x}{1-x}\right)^\rho$$

$$= M \frac{x}{(1-x)(1-2x)} \leq N \ .$$

Il suffit même, pour assurer la convergence de la série considérée, d'exiger que, pour $\lim \rho = \infty$, $\Delta^\rho \Phi(0)$ ne devienne plus rapidement infinie que $\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\rho-1}$.

Le contraire a lieu, au moins pour ce qui concerne la convergence absolue de la série, si $|x| \geq \frac{1}{2}$; si l'on suppose que

$$\lim |\Delta^\rho \Phi(0)| \geq \eta > 0 \ ,$$

où η est une grandeur finie quelconque, on a alors

$$\frac{1}{1-x} \sum_{(\rho)}^{(0,1,\dots)} \left(\frac{x}{1-x}\right)^\rho \left|\Delta^\rho \Phi(0)\right| \geq \frac{\eta}{1-x} \sum_{(\rho)}^{(0,1,\dots)} \left(\frac{x}{1-x}\right)^\rho > N \ ,$$

N étant une grandeur finie arbitrairement grande. Il est nécessaire de supposer ici que, pour $\lim \rho = \infty$, $\Delta^{\rho}\Phi(0)$ s'approche de zéro au moins aussi rapidement que $\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\rho+1}$.

Ugo Broggi (Buenos-Aires).

SUR UNE CLASSE DE CONGRUENCES DE DROITES

1. — Les déterminants du type

$$\text{(I)} \qquad \left| a^{n-i}_{ik,y}\, a^{i}_{ik,z} \right| = 0 \qquad (i, k = 0, \ldots n)$$

où a_y, a_z sont des formes linéaires quaternaires, peuvent s'écrire en fonction des coordonnées pluckériennes de la droite. On peut donc dire que (I) représente un complexe de droites d'ordre $\frac{n(n+1)}{2}$. De tels complexes ont été rencontrés par M. Neuberg[1] et par nous[2].

De même, l'évanouissement d'une matrice

$$\text{(II)} \qquad \left\| a^{n-i}_{iky}\, a^{i}_{ikz} \right\| = 0 \qquad (i = 0, \ldots, n, k = 0, \ldots, n+1),$$

représente une congruence réglée dont nous allons déterminer l'ordre et la classe au moyen des méthodes de MM. Giambelli[3] et Stuyvaert[4].

2. — Pour trouver l'ordre μ, supposons les y fixes dans la matrice (II). Cette matrice doit représenter un nombre fini de droites lorsqu'on considère les z comme les coordonnées courantes.

Supposons que le plan $z_4 = 0$ n'est pas un plan singulier

---

[1] *Mathesis*, 1902, II_3.

[2] *Bul. de l'Acad. de Belgique*, 1907. — *N. A. M.* 1907, VII_4. — *Mémoires de la Soc. des Sc. du Hainaut*, 1908, IX_6.

[3] *Mém. Ist. Lomb.*, 1904. — XI_3.

[4] *Mém. Soc. Sc. Liège*, 1908. — VII_3.