Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 12 (1910)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: POUR UNE THÉORIE DE LA MESURE
Autor: Combebiac, G.
Kapitel: I
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12780

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

connue depuis longtemps. Elle sert de base à un mémoire très remarqué de M. de Tilly[1]; mais il restait à décider, ainsi que le fait d'ailleurs observer cet auteur, si cette propriété suffit pour caractériser complètement les deux catégories de fonctions susceptibles de définir des métriques euclidiennes ou non-euclidiennes.

Les résultats obtenus par S. Lie permettent de résoudre complètement cette question, c'est-à-dire de déterminer les propriétés qui caractérisent les fonctions de distance. L'objet de cet article est de les mettre en lumière.

I

Soit J une fonction de deux points, que nous appellerons leur distance, pour simplifier le langage; nous supposons qu'un point quelconque M peut être déterminé par ses distances à trois points donnés A, B, C, pourvu que ces quatre points occupent des positions générales les uns par rapport aux autres; en d'autres termes, les coordonnées d'un point quelconque M doivent s'exprimer, *en général*, en fonction de ses distances aux points A, B, C et des coordonnées de ceux-ci, c'est-à-dire que le système d'équations

$$\begin{aligned}
J(x', y', z', x'_1, y'_1, z'_1) &= J(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = k_1 \\
J(x', y', z', x'_2, y'_2, z'_2) &= J(x, y, z, x_2, y_2, z_2) = k_2 \\
J(x', y', z', x'_3, y'_3, z'_3) &= J(x, y, z, x_3, y_3, z_3) = k_3
\end{aligned}$$

admet, en général, une solution en x', y', z'.

On peut faire varier d'une manière continue les coordonnées des points A, B, C en laissant constantes leurs distances respectives. Les neuf coordonnées étant alors soumises à trois relations, la position du système des trois points dépend évidemment de six paramètres indépendants.

On peut faire participer au déplacement tous les points de l'espace en déterminant la position d'un point quelconque par la condition de conserver constantes ses distances aux

[1] R. de Tilly, *Essai de Géométrie générale.*

points A, B, C et par la continuité du déplacement. On obtient ainsi une série continue S de transformations définies par les équations précédentes, eu égard aux trois relations mentionnées entre les paramètres x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, z'_2, x'_3, y'_3, z'_3.

Si J est l'invariant d'un groupe continu de transformations, ce groupe est nécessairement contenu dans la série S et, s'il n'admet pas d'autre invariant indépendant, on reconnait facilement qu'il se confond avec cette série, dont les transformations laissent alors constante la distance $M_1 M_2$ de deux points quelconques; autrement dit cette distance reste constante lorsque les coordonnées des points A, B, C, M_1 et M_2 varient d'une manière continue en laissant constantes les autres distances déterminées par ce système de cinq points. *La distance M_1 M_2 est donc, dans ce cas, déterminée en fonction des neuf autres.*

Réciproquement, si la distance $M_1 M_2$ possède cette dernière propriété, elle restera évidemment constante dans toutes les transformations de la série S. Celle-ci, se trouvant alors composée de toutes les transformations qui admettent un invariant, constitue un groupe. Comme celui-ci ne saurait admettre d'invariant indépendant de J et qu'il est d'ailleurs par hypothèse continu, il doit figurer parmi les groupes à invariant binaire et unique déterminés par S. Lie.

Comme les considérations précédentes s'étendent manifestement aux continus à un nombre quelconque de dimensions, les invariants de ces groupes sont bien caractérisés par la propriété essentielle des fonctions de distance, qui peut être énoncée de la manière suivante :

A) *Pour un continu à* n *dimensions, il existe une relation entre les valeurs que prend la fonction de distance pour les* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ *couples formés par* $n+2$ *points.*

La proposition A) constitue donc l'axiome essentiel de la Géométrie métrique et l'on reconnaît aussi, pour $n = 1$, la propriété fondamentale des métriques des continus à une dimension.

Pour ce dernier cas, l'on a pu déterminer l'expression gé-

nérale des fonctions métriques et l'on a vu[1] qu'il était toujours possible, moyennant un choix convenable du système de coordonnées, de prendre la fonction sous la forme $x_2 - x$ ou [2], ce qui revient au même, $(x_2 - x_1)^2$. On connaît aussi les expressions générales des fonctions susceptibles de définir des métriques euclidiennes ou non euclidiennes pour les continus à plusieurs dimensions. Il reste à déterminer les propriétés qu'il faut adjoindre à celle qui est exprimée par la proposition A) pour caractériser ces fonctions.

§ II.

S. Lie a déterminé, pour les continus à deux et à trois dimensions, tous les groupes continus de transformations admettant des invariants binaires. Si l'on ne distingue pas le domaine réel du domaine imaginaire, les invariants de ces groupes, c'est-à-dire les fonctions de distance des métriques correspondantes, peuvent toujours, par un choix convenable des coordonnées, être mises sous l'une des formes suivantes :

Espace.

$$(1)\qquad \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 + (y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)^2}{(1 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2}$$

$$(2)\qquad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$(3)\qquad z_1 + z_2 - \log(x_2 - x_1)^2 - c \log(y_2 - y_1)^2$$

$$(4)\qquad z_2 - z_1 - \frac{(y_2 - y_1)^2}{2(x_2 - x_1)}$$

$$(5)\qquad z_1 + z_2 - \log(x_2 - x_1)^2 - 2\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$(6)\qquad z_2 - z_1 + x_1 y_2 - y_1 x_2 .$$

---

[1] G. Combebiac, *Pour une Théorie de la mesure*, 1er article, *L'Ens. math.*, p. 89-97.

[2] Il est à peine besoin d'indiquer que toutes les fonctions d'une fonction de distance définissent la même métrique.