Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 12 (1910)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR DES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE L'ÉQUATION DU MOUVEMENT DE LA CHALEUR ET DE L'ÉQUATION DES TÉLÉGRAPHISTES

Autor: Turrière, E.

Kapitel: III

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12782

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

cas particulier actuel, elle donne

$$au + 2\psi = \text{const.},$$

d'où l'équation des projections

$$\rho = e^{-\frac{2+a^2}{a}\theta} \times \text{const.}$$

ce sont bien des spirales logarithmiques homothétiques. Les images sphériques de ces asymptotiques ne présentent rien de remarquable.

Le cas $a = \sqrt{2}.i$ correspond à l'une des surfaces de BIANCHI : les projections des asymptotiques (de la seconde famille) sont des cercles concentriques. Cette surface est d'ailleurs imaginaire.

III

6. — Je terminerai ce Mémoire par une application nouvelle de l'*équation des télégraphistes :* c'est le nom donné par MM. POINCARÉ, PICARD et BOUSSINESQ, dans trois Communications à l'Académie, en 1893 et 1894, à l'équation

$$A\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2B\frac{\partial V}{\partial t} = C\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

qui représente la variation du potentiel V dans un fil ; les différents termes correspondent respectivement à la self-induction, à la résistance ohmique et à la capacité du fil. Par un choix convenable d'unités, l'unité de vitesse étant la vitesse de la lumière, on peut réduire les coefficients constants A, B, C à l'unité. Posant alors

$$V = U \,.\, e^{-t},$$

l'équation des télégraphistes prend la forme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U ;$$

ment un cas d'intégration de l'équation différentielle qui correspond à une fonction z dépendant de deux fonctions arbitraires de x et de deux fonctions arbitraires de y, c'est-à-dire à une fonction z intégrale générale d'une certaine équation aux dérivées partielles du quatrième ordre.

c'est là un type d'équations fréquent en Physique ; un changement bien simple de variables, mais qui introduit les imaginaires, ramène cette équation à celle qui se présente dans les vibrations des membranes

$$\Delta_2 U + U = 0 .$$

Il est préférable de ramener l'équation des télégraphistes à l'équation à invariants égaux et constants

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v} + U = 0 ;$$

cette dernière équation aux dérivées partielles, dont les rapports avec l'équation différentielle de Bessel sont bien connus, est un type auquel on peut réduire un grand nombre d'équations : je citerai les exemples suivants, empruntés à Ampère et Imschenetsky :

$$rx^2 + 2sx^2 + \left(x^2 - \frac{b^2}{q^2x^2}\right) t - 2x = 0 ,$$

$$r + 2qs + (q^2 - b^2) t = 0 ;$$

je citerai également l'équation remarquable

$$s^2 = 4pq ,$$

rencontrée par Craig dans des recherches géométriques, et que M. Goursat ramena ultérieurement à la forme $s = z$.

J'ai établi, dans un autre Mémoire [1], le théorème suivant : *La détermination des surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies inclinées à 45° sur les méridiens, peut être ramenée à l'intégration de l'équation des télégraphistes.* Ce n'est là qu'un cas particulier d'un théorème plus général concernant des loxodromies quelconques.

Considérons, en effet, les loxodromies

$$d\varphi = \operatorname{cotg} \alpha \, . \, d\psi \, . \cos \varphi ,$$

[1] *Application de l'équation des télégraphistes aux surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies.* (*Nouvelles Annales,* Janvier 1910.)

inclinées à $\alpha°$ sur les méridiens. L'équation des images sphériques des lignes de courbure étant

$$d\varphi^2 - \cos^2\varphi \,.\, d\psi^2 + \frac{D'' - D\cos^2\varphi}{D'}\, d\varphi d\psi = 0 \,,$$

l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$D'' - D\cos^2\varphi + 2\operatorname{cotg} 2\alpha\, D' \cos\varphi = 0 \,,$$

représente les surfaces (Σ) dont les images sphériques des deux systèmes de lignes de courbure sont les loxodromies.

$$d\varphi = -\operatorname{tg}\alpha \,.\, d\psi \,.\, \cos\varphi \,,$$
$$d\varphi = \operatorname{cotg}\alpha \,.\, d\psi \,.\, \cos\varphi \,,$$

Introduisons alors l'argument τ des fonctions hyperboliques liées aux fonctions circulaires de φ par les relations de M. Laisant

$$\sin\varphi = th\tau \,,\ \cos\varphi \,.\, ch\tau = 1 \,,\ \operatorname{tg}\varphi = sh\tau \,,$$

et prenons pour nouvelle fonction inconnue la fonction U de ψ et de τ définie par la relation

$$U = \varpi ch\tau \,.$$

Les déterminants D, D′, D″ de Gauss deviennent

$$D = \frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2}\, ch\tau - \frac{\partial U}{\partial\tau}\, sh\tau \,,$$

$$D' = \frac{\partial^2 U}{\partial\tau\partial\psi} \,,$$

$$D'' = \left(U + \frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2}\right)\frac{1}{ch\tau} - \frac{\partial U}{\partial\tau}\,.\,\frac{sh\tau}{ch^2\tau} \,;$$

l'équation considérée devient :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2} + U + 2\operatorname{cotg} 2\alpha\, \frac{\partial^2 U}{\partial\tau\partial\psi} = 0 \,.$$

Pour $\alpha = 45°$, cette équation est identique à celle en laquelle M. Poincaré transforme l'équation des télégraphistes. C'est bien là le théorème que j'avais établi. Mais il

suffit de poser

$$\tau = \frac{u+v}{\sin\alpha\cos\alpha}\,.\,\psi = \frac{v}{\sin^2\alpha} - \frac{u}{\cos^2\alpha},$$

pour transformer l'équation générale en

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v} = U\,;$$

d'où résulte le théorème : *La détermination des surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies est réductible à l'équation des télégraphistes.*

E. Turrière (Toulouse).

SUR LA NOTION DE PUISSANCE EN MÉCANIQUE

Dans l'enseignement élémentaire de la mécanique, on se contente le plus souvent d'une définition trop rapide de la puissance. Il conviendrait cependant d'insister sur cette notion, d'une grande l'importance pratique. Les élèves entendent parler, dans la vie courante, de *chevaux* ou de *watts* plus souvent que de *kilogrammètres* ou *d'ergs*[1]; il est donc utile de leur apprendre à appliquer les formules de mécanique à l'évaluation des nombres correspondants.

Je vais montrer rapidement ici comment on peut définir avec soin la notion de puissance et la faire avantageusement intervenir à côté de celle de travail élémentaire soit en statique soit en dynamique. Un très léger changement des équations (dérivées figurant à la place de différentielles) amène leurs différents termes à se prêter immédiatement au

[1] L'emploi fréquent de l'*hectowatt-heure* ou du *cheval-an* comme unités pratiques d'énergie est assez significatif au point de vue de l'importance industrielle respective des mesures de puissance et de travail.