Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 12 (1910)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROBLÈMES RELATIFS A LA PROJECTION AZIMUTALE ÉQUIVALENTE DE LAMBERT

Autor: Brandenberger, C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12777

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

On peut se proposer de calculer l'intégrale au dénominateur de $x'_2 - x'_1$ qui est la masse magnétique totale positive ou négative. En intégrant par rapport au filet entre ses deux extrémités, on aura, comme dans ce qui précède,

$$-k \frac{dV}{dn} ds \, (l_a - l_{a'})$$

$l_a - l_{a'}$ étant la longueur du filet compris entre l'entrée et la sortie du volume aimanté, expression qu'il faudra intégrer par rapport à la surface totale du corps, et dans laquelle $l_a - l_{a'}$, est une fonction du point de la surface auquel se rapporte l'élément de surface ds.

Dans le cas de la sphère on a, θ étant l'angle du rayon vecteur avec l'axe,

$$-k \frac{dV}{dn} = \rho \cos \theta \, , \; l_a - l_{a'} = R \cos \theta, \; ds = R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

et l'intégrale pour la demi-sphère est bien,

$$\frac{2\pi}{3} R^3 \rho \, .$$

L. DE LA RIVE (Genève).

PROBLÈMES RELATIFS A LA PROJECTION AZIMUTALE ÉQUIVALENTE DE LAMBERT [1]

I

La projection azimutale équivalente de Lambert, imaginée par ce dernier en 1772, trouve de plus en plus son emploi lorsqu'on se propose de représenter des portions d'une certaine étendue de la surface du globe terrestre [2].

---

[1] Les principaux résultats de ce travail ont fait l'objet d'une conférence de l'auteur, tenue le 10 octobre 1909, à la Société suisse des Professeurs de mathématiques.

[2] Voir *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. VI, 1, A.
LAMBERT, *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik*. III. Teil, p. 105, Berlin, 1772.
BRANDENBERGER, *Ueber Lamberts flächentreue Azimutalprojektion*. (*Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft* Zürich, *Jahrg. 54, S. 436-448*, 1909.)

Dans ce qui suit je donnerai tout d'abord une méthode simple permettant de *construire la projection de Lambert* P* *d'un point* P, *dont on connaît la longitude et la latitude.* C'est une application très simple des procédés élémentaires de la géométrie descriptive.

Soit O le centre du tracé, c'est-à-dire le point central du domaine dont on se propose d'établir la carte. Par O faisons

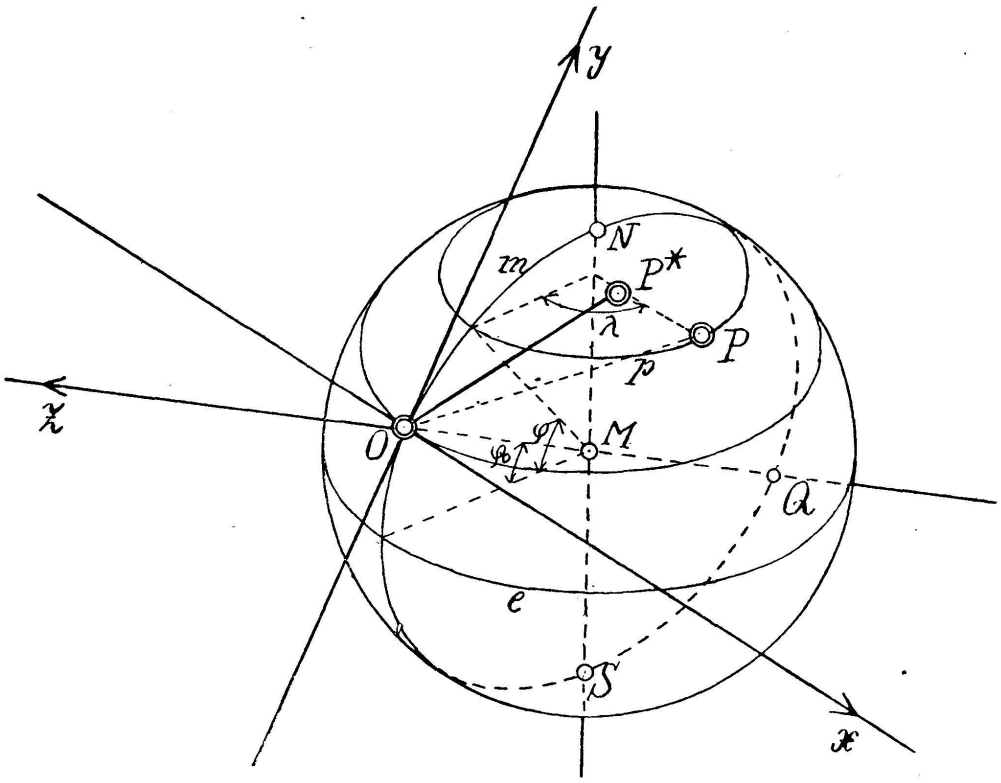

Fig. 1.

passer un système d'axes cartésiens rectangulaires. Oz aura la direction de la verticale en O, cette direction étant considérée comme positive lorsqu'on s'éloigne du centre de la terre. Le plan xOy est le plan tangent à la sphère terrestre en O. C'est sur ce plan aussi que s'effectuera la projection de Lambert du domaine à représenter. Ox sera la tangente au parallèle passant par O, sa direction positive étant celle de l'Ouest vers l'Est, Oy la tangente au méridien de O, sa direction positive étant celle du Sud au Nord.

M (fig. 1) représente le centre de la terre, NS la ligne des pôles. Sur la sphère les latitudes seront comptées, selon

l'usage, à partir de l'équateur (e), tandis que les longitudes se compteront à partir du méridien m du lieu O.

La projection de Lambert P* d'un point P de la sphère terrestre peut se définir comme suit :

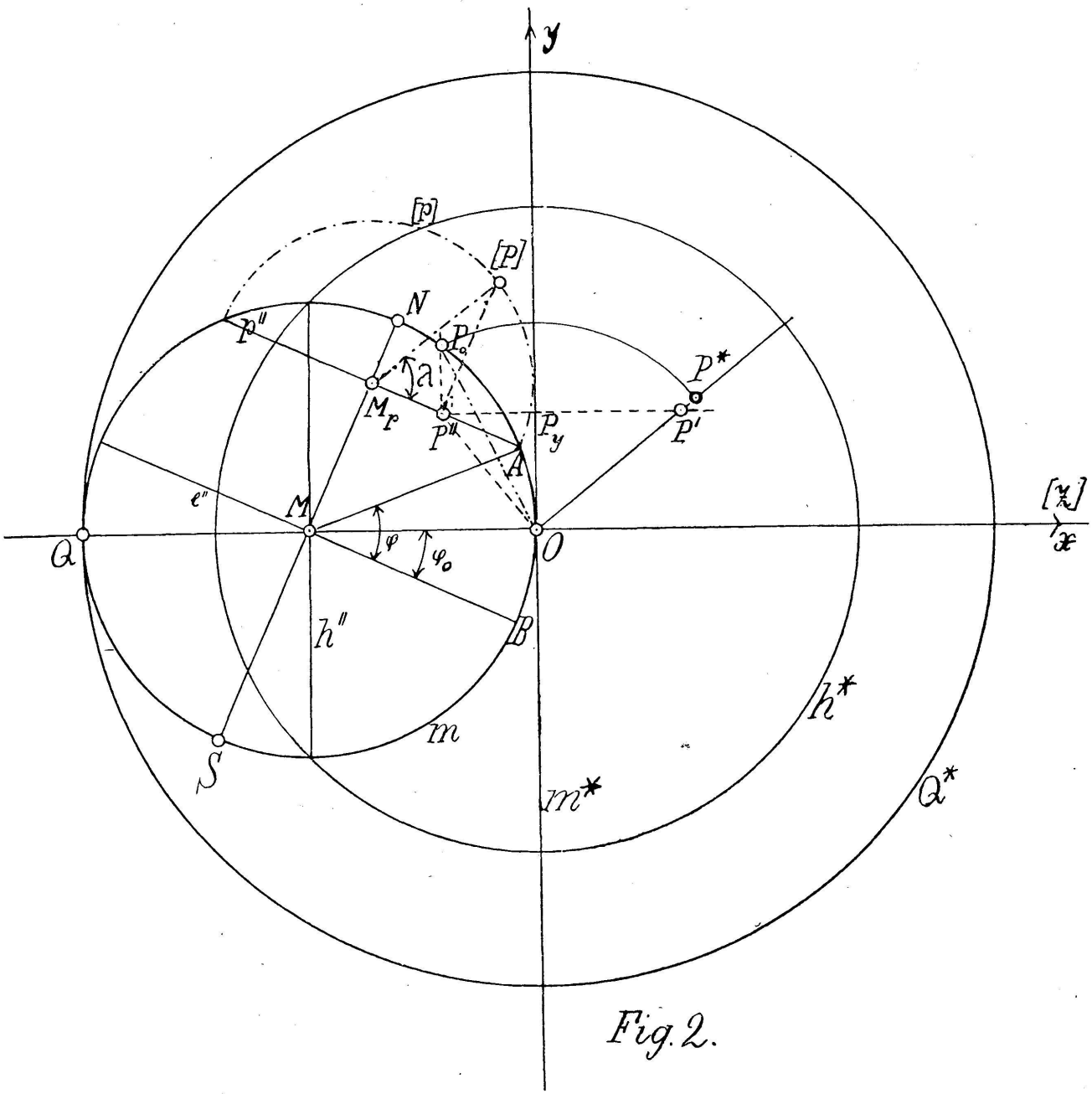

Fig. 2.

1° P* se trouve sur la trace OP* du demi-plan (P, z) sur le plan horizontal xOy.

2° On a OP* = OP, cette dernière distance OP étant mesurée le long de la corde qui relie O à P.

La totalité de la sphère terrestre est de la sorte représentée dans le plan xOy à l'intérieur d'un cercle Q* de centre O et de rayon égal au double de la longueur qui représente le rayon terrestre (fig. 2). Le grand cercle horizontal h (fig.

2, 3 et 4) partage la sphère en deux hémisphères ; l'un (hO) correspond à l'intérieur du cercle $h^\star$ de rayon égal à $\sqrt{2}$, l'autre (hQ) à l'intérieur des deux cercles $h^\star$ et Q*. Au seul point Q, c'est-à-dire au point antipode de O correspond comme projection de Lambert le cercle Q* de rayon égal à 2.

Pour déterminer maintenant le point P* dans le plan xOy nous ferons usage de projections orthogonales.

Les plans xOy et yOz sont respectivement plan horizontal et plan vertical de projection. Oy représente la ligne de terre, placée verticalement dans l'épure (fig. 2).

Sur le plan vertical la sphère se projette orthogonalement, le méridien m de O suivant un cercle tangent à Oy, l'équateur et les parallèles suivant des droites qui font avec Oz un angle φ_0, où φ_0 représente la latitude du point O. La projection de l'équateur est le diamètre e'', celle du parallèle passant par P la corde p''. La projection P$''$ de P elle-même s'obtient par rabattement sur le plan vertical du parallèle p passant par P. L'angle AMB est égal à la latitude φ du point P.

[p] est le parallèle rabattu, sur lequel on a porté l'arc A[P] $= \lambda$, où λ est la longitude de P. [P] est le rabattement, P$''$ la projection orthogonale de P sur le plan vertical. Pour avoir la projection horizontale P$'$ de P on mène la ligne de rappel P$''$ P$_y$ sur laquelle on porte P$_y$P$'$ = P$''$[P]. La trace horizontale du demi-plan (P, z), qui contient le point P* est la demi-droite OP$'$. D'après 2° la distance OP* est égale à la corde OP, dont la vraie grandeur se trouve par une rotation autour de Oz (OP = OP$_0$ = OP*). — C'est ainsi *qu'on peut obtenir la projection de Lambert d'un point quelconque de la sphère au moyen de projections orthogonales.*

II

Dans les figures 3 et 4 on a représenté les parallèles 0°, ± 30°, ± 60°, ± 90°, et les méridiens 0, ± 30°, ± 60°, ± 90°, ± 120°, ± 150°, + 180°.

En ramenant dans le plan de l'équateur les différents parallèles, la construction se simplifie.

Comme pratiquement seul l'hémisphère (Oh) est à repré-

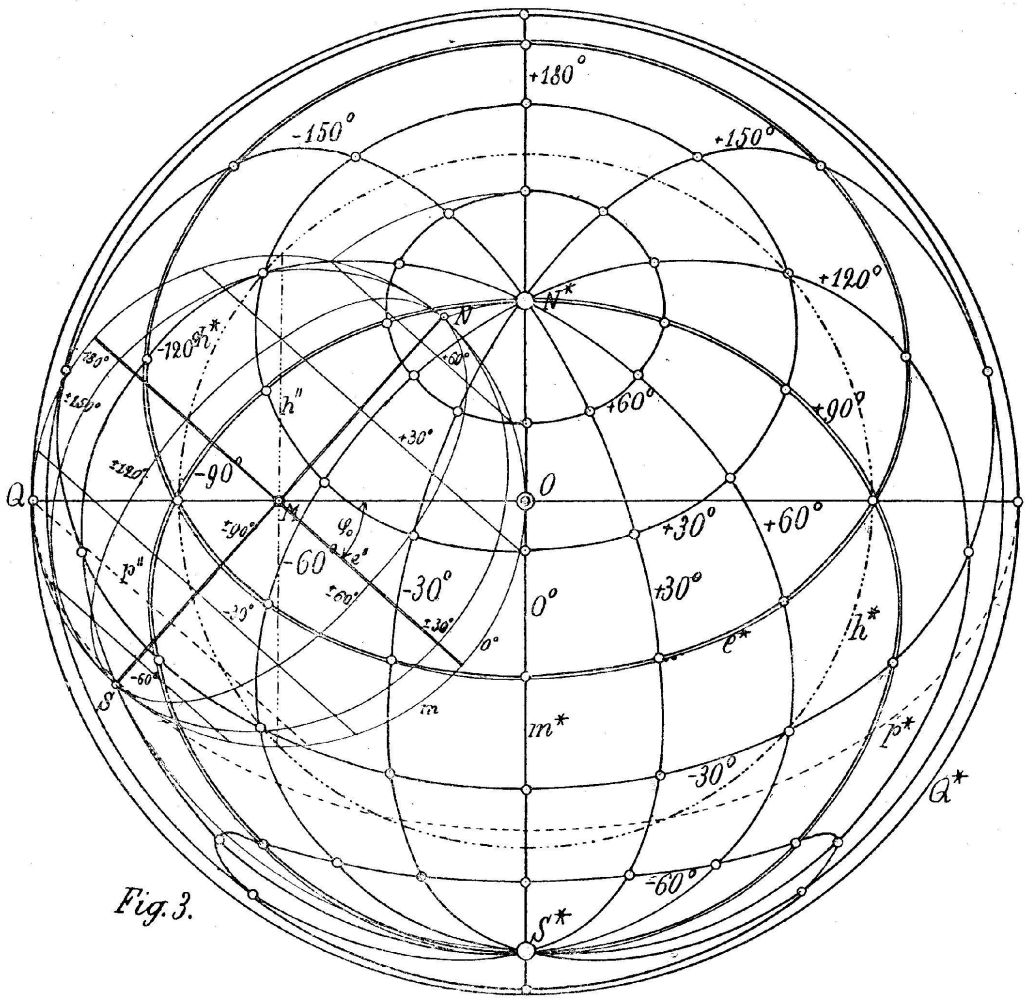
+180°
-150°
+150°
+120°
N*
N
-120°
h*
h''
+60°
+90°
+30°
Q
-90°
O
M
+30°
+60°
-60°
-30°
0°
+30°
p''
e*
h*
S
m
m*
p*
-30°
Q*
-60°
S*

Fig. 3.

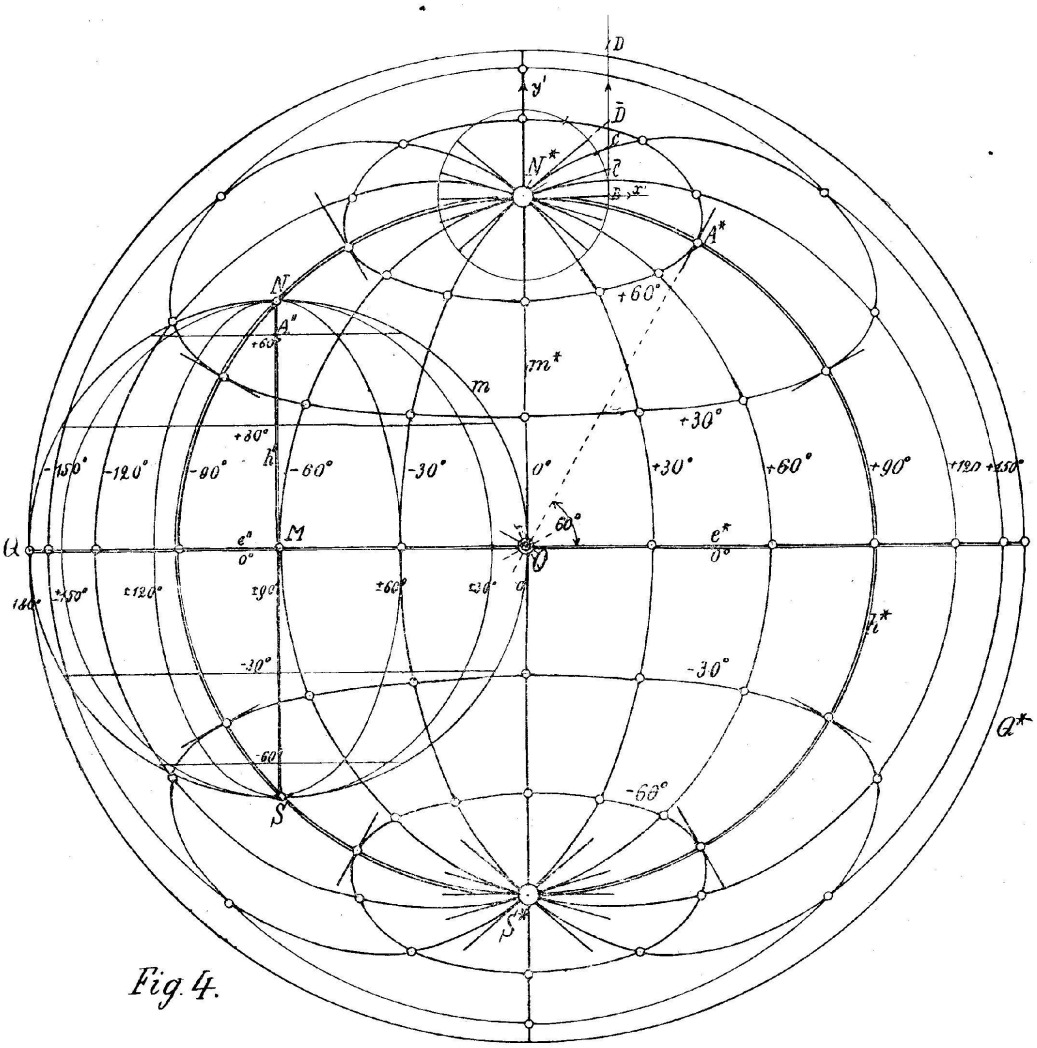
D
y'
D̄
N*
A*
N
+60°
A''
m*
m
+30°
-150°
-120°
-90°
-60°
-30°
0°
+30°
+60°
+90°
+120
+150°
Q
M
e''
e*
O
h*
-30°
-30°
Q*
-60°
S
-60°
S*

Fig. 4.

senter, la carte s'obtient avec exactitude. Des sections défavorables de lignes entre elles ne se présentent pour aucun hémisphère, mais dans le second, Oh, on peut avoir à joindre des points très rapprochés.

Le centre du tracé, fig. 4, est un *point de l'équateur*.

Si l'on désigne par A* (fig. 4) le point d'intersection de l'image p^* d'un parallèle quelconque de latitude φ, avec l'image h^* du méridien de longitude égale à 90° ; il est facile de voir que la droite OA* est tangente à p^* en A*. Autrement dit h^* est coupé orthogonalement par l'image p^* de n'importe quel parallèle. L'équation de p^* en coordonnées polaires (φ, u) est en effet[1]

$$\rho^2 = 2\left(1 \pm \frac{\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2 u}}{\sin u}\right).$$

Comme pour $u = \varphi$ les deux valeurs que prend ρ sont égales entre elles, la droite OA* est bien tangente à p^*. Dans la figure cette droite tangente à été construite pour $\varphi = 60°$.

A deux *méridiens* symétriqnes par rapport au méridien de O correspond comme image une courbe unique du quatrième degré,

$$(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 \sin^2\lambda) + 4\sin^2\lambda = 0$$

admettant N* et S* comme points doubles, fig. 4. De cette équation on déduit immédiatement les angles ω que les tangentes en ces points forment avec Ox (ou N*x'). On a par exemple pour N*

$$tg\omega = \pm\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\lambda = \pm\frac{1}{2}\operatorname{tg}(90° - \lambda).$$

Si donc BD (fig. 4) est égal à la tangente trigonométrique de l'angle $(90° - \lambda)$, $B\overline{D} = \frac{1}{2}BD$ sera la tangente trigonométrique de la direction w. (Cercle trigonométrique autour de N*.)

III

La projection de Lambert d'un cercle quelconque de la sphère est un ovale faisant partie d'une courbe du quatrième

[1] Cf. Fiorini : *Le projezioni delle carte geografiche*, Bologna 1881, ou Brandenberger, *loc. cit.*

degré. La courbe entière se compose de celui-ci et d'un autre qui lui est symétrique par rapport à O. Le second correspond d'ailleurs à un autre cercle de la sphère, qui est symétrique au premier par rapport à un certain plan passant par Oz [1].

La *quadrature de ces ovales* conduit à d'intéressantes applications du Calcul intégral. Les résultats sont simples et l'on peut trouver de nombreux exemples où ils seront indépendants des coefficients de l'équation, si l'on suppose, comme on l'a fait plus haut, $R = 1$. On peut les obtenir aussi par voie géométrique, car la projection de Lambert est, comme on sait, une projection équivalente [2].

Voici quelques exemples de quadratures pour lesquels il est avantageux d'introduire les coordonnées polaires. Comme on l'a dit, les courbes comprennent toujours deux ovales de forme identique. Il ne s'agit jamais que de l'évaluation de l'aire de l'un d'eux.

1. Soit la courbe

$$(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 \sin^2 \lambda) + 4 \sin^2 \lambda = 0 \ ,$$

qui est l'image (fig. 4) d'un méridien de longitude λ. L'aire de l'un des ovales est indépendante de λ et égale à 2π.

2. La courbe

$$(x^2 + y^2 - 4)y^2 + 4 \sin^2 \varphi = 0$$

correspond (fig. 4) à un parallèle de latitude φ. L'aire de la calotte sphérique située au nord de ce parallèle est égale à $2\pi(1 - \sin \varphi)$. Il en est par conséquent de même pour l'un des ovales de la courbe.

3. L'équation de l'image (fig. 3) d'un parallèle de latitude φ est :

$$\left\{ (x^2 + y^2) \sin \varphi_0 + 2(\sin \varphi - \sin \varphi_0) \right\}^2 + y^2 \cos^2 \varphi_0 (x^2 + y^2 - 4) = 0 \ .$$

La surface d'un de ces ovales est $2\pi(1 - \sin \varphi)$. φ_0 n'intervient pas dans le résultat.

4. Un ovale de la courbe

$$(x^2 + y^2 - 2)^2 \cos^2 \varphi_0 + (x^2 + y^2 - 4)(x \operatorname{cotg} \lambda + y \sin \varphi_0)^2 = 0$$

---

[1] Cf. BRANDENBERGER, *loc. cit.*

[2] Voir p. ex. : GERMAIN, *Traité des Projections des Cartes géographiques*. Paris.

est d'aire égale à 2π. Cet ovale est l'image d'un méridien (fig. 3) et partage en deux parties égales l'intérieur du cercle Q^*.

5. Soit enfin a et b deux quantités réelles quelconques. L'un des ovales de la courbe

$$a^2b^2(x^2+y^2-2)^2+(a^2+b^2)y^2(x^2+y^2-4)=0$$

peut être envisagé comme image d'un certain grand cercle de la sphère. On verra facilement que l'aire de l'ovale est encore égale à 2π.

C. Brandenberger (Zurich).

SUR QUELQUES EXEMPLES MATHÉMATIQUES DANS LES SCIENCES NATURELLES[1]

L'observation de la nature fournit de remarquables exemples dans lesquels interviennent les considérations mathématiques les plus diverses.

1. — Ainsi, en examinant le mouvement des glaciers de conformation normale, on aperçoit immédiatement les lignes indiquant la direction du courant et les crevasses glaciaires qui forment au point de vue mathématique un système de trajectoires orthogonales comme on s'en rend compte dans la fig. 1. Les crevasses représentent ici d'une part les lignes d'égale vitesse et de l'autre les lignes de tension maximum.

Dans le mouvement des glaciers, nous sommes donc en présence d'une combinaison de lignes de courant et de lignes de tension. Les lignes de tension s'expliqueront de la façon la plus simple par l'involution projective des lignes de section et de tension dans un milieu tendu[2]. Dans toute involu-

---

[1] Extrait de la Conférence faite par M. Arn. Emch (Soleure), à l'assemblée annuelle de la Soc. suisse des professeurs de mathématiques, tenue à Soleure le 10 oct. 1909. *Einige mathem. u. mechanische Betrachtungen in der Natur.* — Traduction de J.-P. Dumur, Genève.

[2] Ritter, *Graphische Statik* 1. B., 128-134.