COURBES TRANSCENDANTES ET INTERSCENDANTES

Autor(en): **Turrière, É.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1912)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-14286

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

COURBES TRANSCENDANTES ET INTERSCENDANTES

A la base de toute classification, se trouve généralement un certain nombre entier : c'est ce qui a permis d'envisager diverses classifications des courbes algébriques, puisque plusieurs nombres entiers (le degré, la classe, le genre) ont pu être associés à ces courbes ; il n'en est nullement de même en ce qui concerne les courbes transcendantes, à moins que l'on n'ait recours à la théorie des équations différentielles. Il serait cependant possible, en se permettant de modifier convenablement le sens attribué jusqu'ici à un mot, fort peu usité d'ailleurs, de diviser les courbes transcendantes en deux catégories, dont la première servirait à établir une sorte de continuité entre les courbes algébriques et les courbes transcendantes de la seconde catégorie.

Leibniz appela *interscendantes* les courbes planes dont les équations s'obtiennent en égalant à zéro des polynômes à exposants irrationnels. Un exemple d'une grande simplicité, donné par Euler et reproduit par Salmon, est celui de la parabole interscendante représentée par l'équation

$$y = x^{\sqrt{2}}.$$

La fonction précédente peut être représentée par une série de courbes algébriques, dont le degré croît constamment et au delà de toute limite ; ces courbes sont les paraboles d'équation

$$y = x^m,$$

m étant un nombre rationnel ; ces paraboles s'approchent de plus en plus de la courbe cherchée sans arriver à la représenter exactement. Un autre exemple connu est celui de la courbe interscendante qui a fait l'objet d'une question proposée par M. Rose et résolue dans *Mathesis* (1905, p. 29 et 164) : il s'agit de déterminer la courbe la plus générale pour laquelle la relation

$$\overline{TP}^2 + \overline{ON'}^2 = \overline{OM}^2$$

existe entre le rayon vecteur OM, la sous-tangente TP et le segment ON′ de l'axe OY qui est compris entre l'origine O et la

normale MN′; l'équation différentielle du problème,

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} - x^2 - y^2 = 0 ,$$

admet pour intégrale générale la courbe interscendante d'équation

$$y = \frac{x}{2\sqrt{2}}\left(ax^{\sqrt{2}} - \frac{1}{ax^{\sqrt{2}}}\right).$$

Il n'y a guère d'autre exemple connu de courbes interscendantes ayant fait l'objet de travaux; aussi le terme « interscendant » est-il peu usité et peu connu. Il me semble qu'on devrait faire, dans la terminologie mathématique, une place plus grande à ce mot qui est particulièrement expressif; il suffirait d'étendre la définition des courbes interscendantes à des courbes plus générales que celles qui furent considérées par Leibniz ou Euler; cette généralisation d'ailleurs ne pourrait donner lieu à aucune confusion et interpréterait au mieux la pensée même de Leibniz.

Je considérerai dans ce but une famille de courbes (C) dépendant d'un paramètre réel m et qui varie d'une manière continue. Je supposerai que pour toutes les valeurs rationnelles du paramètre m, pour lesquelles les courbes (C) correspondantes sont bien définies, ces courbes (C) sont algébriques; pour les valeurs irrationnelles du paramètre m, au contraire, les courbes (C) seront supposées transcendantes : c'est à ces dernières courbes transcendantes que je proposerai de donner le nom d'interscendantes.

Avec cette définition généralisée, on voit tout de suite combien seront nombreuses les courbes interscendantes, parmi celles des courbes transcendantes qui ont donné lieu à des recherches. Parmi les courbes définies simplement en coordonnées ponctuelles cartésiennes, il suffit de citer les perles de Sluse, les courbes de Lamé; parmi les courbes d'équations paramétriques simples, les courbes de Lissajous, les hypocycloïdes et les épicycloïdes, la courbe de Jean Bernoulli...; les spirales sinusoïdes, les rhodonées, les épis, les nœuds, les hyperboles étoilées, les courbes de puissance... seront de nouveaux exemples de courbes définies en coordonnées polaires.

Il est presque inutile d'ajouter que la définition que je viens d'introduire des courbes interscendantes vaut pour les courbes gauches aussi bien que pour les courbes planes; les clélies et les courbes à torsion constante découvertes par M. Fabry, les courbes de Serret, les courbes de Lamé gauches, les épicycloïdes sphériques seront des exemples de courbes gauches, algébriques ou interscendantes suivant que le paramètre envisagé sera rationnel ou non.

Les courbes d'équation

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{cx^{m+1}}{m+1} + \frac{x^{1-m}}{c(m-1)}\right),$$

c'est-à-dire les courbes de poursuite, seront aussi algébriques ou interscendantes suivant le cas. Pour $m = \pm 1$, toutefois, l'équation précédente cesse d'avoir un sens ; mais on sait qu'alors les courbes de poursuite correspondantes sont des courbes transcendantes ; pour $m = 1$, par exemple, l'équation est

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{cx^2}{2} - \frac{1}{c}\log x\right);$$

les courbes de poursuite seront donc algébriques ou interscendantes lorsque leur équation aura un sens ; et aux cas singuliers $m = \pm 1$ correspondront des courbes véritablement transcendantes.

Cette remarque me conduit à la considération de certaines courbes transcendantes susceptibles d'être associées à des familles de courbes algébriques ou interscendantes ; c'est là certainement un fait offrant un véritable intérêt que, par un passage à la limite, certaines courbes transcendantes particulières puissent être envisagées comme appartenant à une famille de courbes (C), *sous l'unique condition d'invoquer la continuité*. Dans son *Mémoire sur la manière d'exprimer les fonctions par des séries de quantités périodiques*, Poisson cite un problème de Jean Bernoulli qu'Euler résolut le premier et dont Legendre donna ensuite une solution plus simple. Dans cette proposition très remarquable, la cycloïde ordinaire apparaît comme étant la limite d'une infinité de développantes successives d'un arc d'une courbe absolument quelconque. Passant à un autre ordre d'idées, non sans quelque analogie avec le problème de Bernoulli qui m'a conduit à réfléchir au sujet de diverses questions que je traite dans le présent article, je considérerai une famille de courbes (C) dépendant d'un paramètre m et qui seront algébriques ou interscendantes dans les conditions que j'ai antérieurement précisées. Lorsque m tend vers une certaine limite, pour laquelle l'équation des courbes (C) se présente sous la forme d'indétermination ou d'impossibilité, il se présente un grand nombre de cas où les courbes (C) ont une limite qui est une courbe transcendante particulière. C'est ce qui a lieu pour les paraboles

$$y^m = 1 + mx$$

qui tendent, lorsque m a pour limite zéro, vers la courbe exponentielle ou logarithmique ; c'est aussi une propriété connue que

les courbes de Lamé admettent pour limite, dans certaines conditions, la courbe d'équation

$$e^x + e^y = 1 ,$$

dont l'étude est intimement liée à celle de la surface signalée par Sophus Lie comme étant une surface de translation d'une infinité de manières.

Du fait que la courbe exponentielle ou logarithmique

$$y = e^x \quad \text{ou} \quad y = \log x ,$$

est une limite de courbes algébriques ou interscendantes, il résulte que cette même propriété s'étend aux courbes dont l'équation est une fonction égalée à zéro et rationnelle par rapport à x, y, e^x, e^y, $\log x$, $\log y$, shx, chx, thx, shy, chy, thy : cette remarque s'applique à la chaînette ordinaire, à la visoria de Saavedra, à la courbe

$$y = \frac{x}{\log x - 1{,}08366}$$

représentative, d'après Tchebycheeff, de la fréquence de nombres premiers... Les courbes analytiques de mortalité et de survie seront des exemples de courbes de cette nature, d'équations rationnelles par rapport à x, e^x, $\log y$, $\log x$; pour celle de Gauss, par exemple, on aura :

$$\log y = \mathrm{A}a^x - \mathrm{B}b^x ;$$

pour celle de Lazarus :

$$\log y = \mathrm{A} \log x + \mathrm{A}_1 a_1^x + \mathrm{A}_2 a_2^x + \ldots + \mathrm{A}_n a_n^x ;$$

pour celle de Quiquet :

$$\log y = \mathrm{A} \log x + \mathrm{A}_1 a_1^x + \mathrm{A}_2 a_2^x .$$

Les courbes réelles

$$y = (1 + imx)^{\frac{1}{m}} + (1 - imx)^{\frac{1}{m}} ,$$

$$iy = (1 + imx)^{\frac{1}{m}} - (1 - imx)^{\frac{1}{m}} ,$$

permettront de même de définir, au titre de limites, les sinusoïdes ; et, d'une façon générale, les courbes représentées au moyen de fonctions rationnelles des lignes trigonométriques (la cycloïde, la tangentoïde, l'hélice ordinaire, par exemple) rentreront dans la

catégorie considérée. D'après leurs définitions cinématiques, la cycloïde ordinaire et la développante de cercle sont des limites de familles d'hypocycloïdes ou d'épicycloïdes. La tractrice et la chaînette d'égale résistance de Coriolis seront deux exemples remarquables où figurent les lignes trigonométriques de x et l'exponentielle de l'autre variable y. La courbe

$$y = x \sin x ,$$

la méridienne

$$y = a \frac{\sin (bx + c)}{\sqrt{x}} ,$$

de la surface proposée pour représenter l'ébranlement produit dans l'eau lorsqu'on jette une pierre, sont encore à citer.

Je passerai maintenant au cas des coordonnées polaires. Les rhodonées

$$\rho = \frac{\sin m\omega}{m}$$

et les nœuds

$$\rho = \frac{\operatorname{tang} m\omega}{m} ,$$

lorsque m tend vers zéro, définissent la spirale d'Archimède sous le point de vue considéré ; dans les mêmes conditions, les épis

$$\rho = \frac{m}{\sin m\omega}$$

conduisent à la spirale hyperbolique ; le lituus de Cotes est la limite des courbes analogues

$$\rho^2 = \frac{m}{\sin m\omega} .$$

A ce qui précède peut être rattaché un résultat intéressant que je trouve dans le récent ouvrage de M. D. Gautier, *Mesure des angles. Hyperboles étoilées et développante.* En remarquant que la courbe désignée par la dénomination d'hyperbole développante est identique à la quadratrice de Dinostrate, celle-ci, qui correspond à l'équation

$$\rho = \frac{\omega}{\sin \omega} ,$$

est la limite des hyperboles étoilées particulières

$$\rho = \frac{1}{m} \frac{\sin m\omega}{\sin \omega} ,$$

lorsque m tend vers zéro ; une autre famille d'hyperboles étoilées particulières,

$$\rho = m \frac{\sin \omega}{\sin m\omega},$$

permettrait évidemment d'obtenir la cochléoïde ; une généralisation facile conduirait à la syncochléoïde et autres courbes connexes qui ont été rencontrées dans l'étude de l'hélicoïde.

J'ai réservé pour la fin le cas de la courbe qui transporta d'enthousiasme Jacques Bernoulli : la spirale logarithmique est elle aussi une limite de courbes algébriques ou interscendantes et celles-ci sont des plus remarquables. Que l'on considère, en effet, les spirales sinusoïdes d'équation

$$\rho^m = a^m \frac{\sin (h + m\theta)}{\sin h},$$

lorsque h tend vers zéro ; la limite de ces courbes n'est autre que la spirale logarithmique

$$\rho = a e^{\theta \cot h}.$$

C'est dans ce fait signalé par M. Haton de la Goupillière et démontré par M. Allégret, qu'il faut certainement chercher la raison des analogies profondes qui existent entre les propriétés de la spirale logarithmique et des spirales sinusoïdes.

Par ces exemples remarquables, j'espère avoir suffisamment montré l'intérêt que présente la généralisation de la notion, introduite par Leibniz, de courbes interscendantes. J'insisterai, pour terminer, *sur la nécessité de la considération des courbes interscendantes généralisées,* lorsqu'on désire établir la continuité entre une famille de courbes algébriques et une courbe transcendante particulière. Pourquoi se permettrait-on, en effet, d'écrire ou de dire qu'une certaine courbe transcendante est la limite d'une famille de courbes algébriques, lorsqu'en Analyse, dans les questions de limites, continuité, etc., aucune hypothèse restrictive n'est faite sur les variables considérées ? J'ajouterai aussi que les courbes interscendantes du plan forment, parmi les courbes transcendantes, un ensemble invariant à l'égard du groupe des transformations algébriques du plan.

É. Turrière (Poitiers).