Sur un certain développement en fraction continue.

Autor(en): **Mirimanoff, D.**

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1912)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

même sens du même angle le centre C autour de q ; t_1 — l'axe de collinéation — étant l'intersection de P et π ; q - le premier axe secondaire — étant l'intersection de π avec le plan mené par C parallèlement à P. Supposons que, par le mouvement de rotation, A soit venu en A_1 et C en C_1.

En désignant par M le centre de la circonférence décrite par C et par N celui de la circonférence décrite par A, nous constatons que les triangles CMC_1 et ANA_1 sont semblables, parce que tous les deux sont isoscèles et par condition $\sphericalangle CMC_1 = \sphericalangle ANA_1$. Et comme les triangles sont aussi semblablement situés, on a :

$$CC_1 \parallel AA_1, \tag{1}$$

De la similitude des triangles A'NA et A'MC on a :

$$A'A : A'C = NA : MC. \tag{α}$$

De même de la similitude des triangles ANA_1 et CMC_1 on a :

$$NA : MC = AA_1 : CC_1. \tag{β}$$

De (α) et (β) on obtient :

$$A'A : A'C = AA_1 : CC_1, \tag{2}$$

La relation (2) avec le résultat (1) dit que la ligne de jonction des points A_1 et C_1 passe par A'. Le théorème est donc démontré.

L. Hantos (Kecskemét, Hongrie)

Sur un certain développement en fraction continue.

A propos d'une communication de M. Baatard.

Au cours d'une communication présentée à Soleure (*Ens. math.*, 1912, p. 31-37), M. Baatard a signalé une propriété curieuse d'une famille de fractions continues qu'il ne serait peut-être pas inutile de mettre en lumière.

Soient a_0 le terme initial et $a_1, a_2, \ldots a_m$ les quotients incomplets d'une période dans le développement en fraction continue de $\sqrt{A}$; je rappelle que $a_m = 2a_0$.

A ce terme initial et à la suite infinie des quotients incomplets répondent les réduites $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0}{1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$, etc., qui convergent de plus en plus vers $\sqrt{A}$.

Appliquons à l'une des réduites $\frac{p_n}{q_n}$ le procédé (ω') de M. Baatard[1].

Nous aurons une nouvelle valeur approchée b de $\sqrt{A}$ qui s'exprime ainsi

$$b = \frac{p_n^2 + Aq_n^2}{2p_n q_n}.$$

Or, dans les exemples choisis par M. Baatard, on a, quel que soit n, $b = \frac{p_{2n}}{q_{2n}}$; en d'autres termes, on a la relation

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p_n^2 + Aq_n^2}{2p_n q_n}. \tag{1}$$

M. Baatard fait remarquer avec raison que ce fait ne se présente pas toujours.

Une question se pose alors : quels sont les nombres A dont les développements en fraction continue fournissent des réduites vérifiant la condition (1) ?

Je rappellerai d'abord que la relation (1) a lieu pour tout A, lorsque l'indice n est un multiple de m, m étant le nombre des termes de la période.

On a, en effet, quel que soit i,

$$p_{im} - q_{im}\sqrt{A} = (p_m - q_m\sqrt{A})^i, \tag{2}$$

d'où

$$p_{2im} - q_{2im}\sqrt{A} = (p_m - q_m\sqrt{A})^{2i},$$

et par conséquent (Cf. *Serret*, Cours d'alg. sup., 5e édit., t. 1,

---

[1] Dans le cas général d'une racine quelconque $\sqrt[n]{A}$, ce procédé consiste à remplacer une première valeur *approchée* a de $\sqrt[n]{A}$ par la valeur

$$b = \frac{p' + (n-1)a}{n}, \qquad \text{où} \qquad p' = \frac{A}{a^{n-1}}$$

c'est-à-dire par

$$a - \frac{a^n - A}{na^{n-1}} = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

en posant $x^n - A = f(x)$. On voit donc que le procédé (ω') revient à celui de Newton appliqué à l'équation $x^n - A = 0$. (Cf. Encycl. des Sciences math., Tome I, art. 23, p. 282, et Tome II, art. 26, p. 58.)

p. 76 et 77)

$$(3) \qquad p_{2im} - q_{2im}\sqrt{A} = (p_{im} - q_{im}\sqrt{A})^2 ,$$

ce qui donne bien

$$\frac{p_{2im}}{q_{2im}} = \frac{p_{im}^2 + Aq_{im}^2}{2p_{im}q_{im}} .$$

Mais la relation (1) n'a pas lieu pour tout A, lorsque l'indice n n'est pas un multiple de m. Soit, par exemple, $A = 7$. Ici $a_0 = 2$, la période contient quatre termes 1, 1, 1, 4. En appliquant (ω') à $\frac{p_1}{q_1} = \frac{2}{1}$, on a $b = \frac{11}{4}$ et comme $\frac{p_2}{q_2} = 3$, on voit que $b \neq \frac{p_2}{q_2}$.

Je dis que les nombres A qui vérifient la relation (1) sont *caractérisés* par la condition :

$$(4) \qquad 2a_0 \text{ est divisible par } A - a_0^2 .$$

Cette condition est nécessaire et suffisante. *Elle est nécessaire.* En effet, la relation (1) étant supposée vraie pour tout n, on doit avoir en particulier

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1^2 + Aq_1^2}{2p_1q_1} = \frac{a_0^2 + A}{2a_0} ,$$

et comme

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{a_0a_1 + 1}{a_1} ,$$

on en tire

$$2a_0 = a_1(A - a_0^2) .$$

Donc $2a_0$ est divisible par $A - a_0^2$ et le quotient de la division est précisément égal à a_1.

La condition (4) *est suffisante.* Supposons que $2a_0$ soit divisible par $A - a_0^2$ et posons

$$\frac{2a_0}{A - a_0^2} = d .$$

En formant les quotients *complets* x_1, x_2, on trouve

$$x_1 = \frac{a_0 + \sqrt{A}}{A - a_0^2} = \frac{2a_0 + \frac{1}{x_1}}{A - a_0^2} = d + \frac{1}{x_1(A - a_0^2)} .$$

Donc $a_1 = d$ et comme $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$, on en tire

$$x_2 = x_1(A - a_0^2) = 2a_0 + \frac{1}{x_1}.$$

Par conséquent $a_2 = 2a_0$ et $x_3 = x_1$.

La période se compose donc de deux termes :

$$a_1 = \frac{2a_0}{A - a_0^2} \quad \text{et} \quad a_2 = 2a_0,$$

ou du seul terme $2a_0$, lorsque $A - a_0^2 = 1$.

Si donc la condition (4) est vérifiée, la relation (1) a lieu, en vertu de (3) (en posant $m = 2$), pour toutes les réduites de rangs pairs. Il nous reste à la démontrer pour les réduites de rangs impairs.

Or

$$\frac{p_2}{q_2} = a_0 + \frac{A - a_0^2}{2a_0} = \frac{a_0^2 + A}{2a_0} = \frac{p_1^2 + Aq_1^2}{2p_1q_1}.$$

La relation (1) a donc lieu pour $n = 1$ et on peut écrire dans ce cas particulier

$$(5) \qquad p_2 - q_2\sqrt{A} = \frac{1}{A - a_0^2}(p_1 - q_1\sqrt{A})^2.$$

Considérons maintenant une réduite quelconque $\frac{p_{2i-1}}{q_{2i-1}}$ de rang impair. Soit

$$\frac{\alpha}{\beta} = a_1 + \frac{1}{2a_0} = \frac{2a_0a_1 + 1}{2a_0}.$$

On a, comme on sait (*Serret*, p. 62),

$$p_{2i-1} - q_{2i-1}\sqrt{A} = (p_1 - q_1\sqrt{A})(\alpha - \beta x_1)^{i-1},$$

et comme $\alpha - \beta x_1 = p_2 - q_2\sqrt{A}$, il vient

$$p_{2i-1} - q_{2i-1}\sqrt{A} = (p_1 - q_1\sqrt{A})(p_2 - q_2\sqrt{A})^{i-1}$$

d'où, en vertu de (2) et de (5),

$$p_{2(2i-1)} - q_{2(2i-1)}\sqrt{A} = \frac{1}{A - a_0^2}(p_{2i-1} - q_{2i-1}\sqrt{A})^2$$

ce qui conduit à la relation (1) pour n impair. Si donc la condition (4) est vérifiée, la relation (1) a lieu quel que soit n. C.Q.F.D.

Il résulte de là que les nombres A vérifiant la relation (1) sont de la forme

$$a_0^2 + \frac{2a_0}{a_1},$$

a_0 étant un nombre entier quelconque et a_1 un diviseur quelconque de $2a_0$. Le nombre des nombres A compris entre a_0^2 et $(a_0+1)^2$ est donc égal au nombre des différents diviseurs de $2a_0$.

Pour $a_0 = 1$, le diviseur $a_1 = 2$ ou 1, d'où $A = 2$ et 3.

Pour $a_0 = 2$, le diviseur $a_1 = 4, 2, 1$, d'où $A = 5, 6, 8$.

J'ajouterai que les nombres A ont déjà été rencontrés par Euler (Cf. l'article de M. Aubry, *Ens. math.*, 1912, p. 204, exerc. 24).

Bien que ces résultats se déduisent très simplement des propriétés classiques des fractions continues, j'ai pensé qu'il y avait quelque intérêt à les rappeler, d'autant plus qu'ils se rattachent au travail de M. Aubry que je viens de citer.

D. Mirimanoff (Genève).

CHRONIQUE

Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

I. — Réunion de Cambridge. 21-28 août 1912.

Programme général.

Mercredi 21 août, 9 h. du matin : Séance du Comité central.

3 h. de l'après-midi : *Séance des délégués.* Elle aura lieu dans l'une des salles du Laboratoire des ingénieurs, au siège du Congrès.

Jeudi 22 août, 10 h. du matin. *Séance d'ouverture* du 5e Congrès international des mathématiciens. Sir George Greenhill, Vice-président de la Commission, parlera des travaux de la Commission.

Vendredi 23 août, 9 h. du matin, 1re séance, en commun avec la section d'enseignement du Congrès : *Présentation des travaux des*