Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 14 (1912)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA THÉORIE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES
Autor: Plancherel, M.
Kapitel: 2. Analogies algébriques de la théorie des équations intégrales.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14282

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

montre que la résolution de l'équation générale peut se ramener à celle de l'équation à noyau symétrique et il aborde directement l'étude de l'équation intégrale homogène à noyau symétrique. Il établit par des raisonnements directs et très simples tous les théorèmes de Fredholm et de Hilbert dont l'énoncé ne fait pas intervenir les séries de Fredholm; puis, par une méthode imitée de méthodes de Schwarz et de Græfe, il établit l'existence d'un paramètre singulier et montre que la résolvante du noyau symétrique est une fonction méromorphe à pôles simples. La résolution de l'équation intégrale inhomogène découle ensuite facilement de celle de l'équation homogène. Etablissant la forme canonique du noyau symétrique, il retrouve et généralise (en les débarrassant d'une restriction inutile) les théorèmes de développement de Hilbert. La thèse de Schmidt présente des qualités de simplicité et d'élégance remarquables; les démonstrations y font transparaître immédiatement les analogies algébriques profondes de la théorie des équations intégrales.

Les nombreux travaux parus à la suite des travaux cités n'ont pas modifié les lignes générales de la théorie. Nous ne citerons en passant que ceux de Plemelj et de Goursat relatifs à l'étude de la résolvante de Fredholm dans le voisinage de ses pôles et ceux de J. Schur démontrant sans l'intermédiaire des formules de Fredholm plusieurs propriétés des équations intégrales à noyau asymétrique. Par contre, des points de vue tout nouveaux ont été apportés par Hilbert dans ses 4me et 5me notes[1] : sa méthode des formes quadratiques à une infinité de variables a permis d'aborder des cas qui échappent à la théorie de Fredholm.

2. Analogies algébriques de la théorie des équations intégrales.

Du fait que les formules de Fredholm s'obtiennent comme cas limite des formules de résolution d'un système de n équations linéaires à n inconnues, il est à prévoir que la théorie des équations intégrales présentera des analogies avec celle de ces systèmes. MM. Hilbert et Tœplitz ont, dans leurs études sur les formes bilinéaires à une infinité de variables, insisté sur le fait que la notion de déterminant, qui joue un si grand rôle dans l'exposition ordinaire de la théorie des équations algébriques linéaires, est difficilement extensible au cas d'une infinité d'équations à une infinité d'inconnues. Aussi, pour bien montrer ces analogies, allons-nous d'abord, avec M. Tœplitz, énoncer sous une forme qui diffère de la forme ordinairement suivie, les théorèmes relatifs à la résolution des systèmes d'équations linéaires,

[1] *Loc. cit.*

en séparant nettement des autres ceux de ces théorèmes qui, dans leur énoncé, n'impliquent pas la notion de déterminant.

Considérons, pour cela, les systèmes suivants de n équations à n inconnues

$$(\mathrm{I}a)\quad \begin{cases} (1+k_{11})x_1 + k_{12}x_2 + \dots + k_{1n}x_n = f_1 \\ k_{21}x_1 + (1+k_{22})x_2 + \dots + k_{2n}x_n = f_2 \\ \dots\dots\dots \qquad\qquad \dots\dots\dots \\ k_{n1}x_1 + k_{n2}x_2 + \dots + (1+k_{nn})x_n = f_n \end{cases}$$

$$(\mathrm{I}b)\quad \begin{cases} (1+k_{11})x_1 + k_{12}x_2 + \dots + k_{1n}x_n = 0 \\ k_{21}x_1 + (1+k_{22})x_2 + \dots + k_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \qquad\qquad \dots\dots\dots \\ k_{n1}x_1 + k_{n2}x_2 + \dots + (1+k_{nn})x_n = 0 \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}a)\quad \begin{cases} (1+k_{11})y_1 + k_{21}y_2 + \dots + k_{n1}y_n = g_1 \\ k_{12}y_1 + (1+k_{22})y_2 + \dots + k_{n2}y_n = g_2 \\ \dots\dots\dots \qquad\qquad \dots\dots\dots \\ k_{1n}y_1 + k_{2n}y_2 + \dots + (1+k_{nn})y_n = g_n \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}b)\quad \begin{cases} (1+k_{11})y_1 + k_{21}y_2 + \dots + k_{n1}y_n = 0 \\ k_{12}y_1 + (1+k_{22})y_2 + \dots + k_{n2}y_n = 0 \\ \dots\dots\dots \qquad\qquad \dots\dots\dots \\ k_{1n}y_1 + k_{2n}y_2 + \dots + (1+k_{nn})y_n = 0 \end{cases}$$

(Ia) et (IIa) sont des systèmes inhomogènes; les matrices des coefficients des inconnues y sont *transposées*. (Ib) et (IIb) sont les systèmes homogènes correspondants; ils admettent toujours les solutions triviales $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$. Nous conviendrons de ne pas compter de telles solutions comme solutions propres de ces systèmes. On a les théorèmes :

I. *Les systèmes homogènes transposés* (Ib) *et* (IIb) *ont le même nombre* $\mathrm{r}\,(0 \leqq \mathrm{r} < \mathrm{n})$ *de solutions linéairement indépendantes.*

II. *Lorsque* $\mathrm{r} = 0$, *les systèmes inhomogènes transposés* (Ia) *et* (IIa) *ont chacun une solution unique et bien déterminée pour tout système de valeurs des seconds membres* $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \dots \mathrm{f}_n$; $\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2, \dots \mathrm{g}_n$.

III. *Lorsque* $\mathrm{r} > 0$, *les systèmes* (Ia) *et* (IIa) *n'ont en général pas de solutions.* Notons par

$$\begin{array}{c|c} \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(1)} & \beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}, \dots, \beta_n^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \dots, \alpha_n^{(2)} & \beta_1^{(2)}, \beta_2^{(2)}, \dots, \beta_n^{(2)} \\ \dots\dots \qquad \dots\dots & \dots\dots \qquad \dots\dots \\ \alpha_1^{(r)}, \alpha_2^{(r)}, \dots, \alpha_n^{(r)} & \beta_1^{(r)}, \beta_2^{(r)}, \dots, \beta_n^{(r)} \end{array} \qquad (11)$$

deux systèmes complets de r solutions linéairement indépendantes de (Ib) et de (IIb). La solution générale de (Ib) est par suite

$$x_p = c_1\alpha_p^{(1)} + c_2\alpha_p^{(2)} + \ldots + c_r\alpha_p^{(r)}, \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

et celle de (IIb)

$$y_p = c_1\beta_p^{(1)} + c_2\beta_p^{(2)} + \ldots + c_r\beta_p^{(r)}, \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

$c_1, c_2, \ldots, c_r$ étant r constantes arbitraires quelconques. Pour que (Ia) soit résoluble, *il faut et il suffit* que $[f] = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ vérifie les r relations

$$f_1\beta_1^{(s)} + f_2\beta_2^{(s)} + \ldots + f_n\beta_n^{(s)} = 0, \qquad (s = 1, 2, \ldots, r) \qquad (12)$$

et de même pour que (IIa) soit résoluble, *il faut et il suffit* que $[g]$ vérifie les r relations

$$g_1\alpha_1^{(s)} + g_2\alpha_2^{(s)} + \ldots + g_n\alpha_n^{(s)} = 0, \qquad (s = 1, 2, \ldots, r) \qquad (13)$$

Lorsque les relations (12) sont vérifiées, la solution générale de (Ia) est de la forme

$$x_p = X_p + c_1\alpha_p^{(1)} + c_2\alpha_p^{(2)} + \ldots + c_r\alpha_p^{(r)}, \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

(X_p) étant une solution particulière quelconque du système et $c_1, c_2, \ldots, c_r$ r constantes arbitraires. De même, si les relations (13) sont vérifiées, et si (Y_p) désigne une solution particulière quelconque de (IIa), la solution générale de ce système est

$$y_p = Y_p + c_1\beta_p^{(1)} + c_2\beta_p^{(2)} + \ldots + c_r\beta_p^{(r)}, \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Remarquons qu'il résulte des théorèmes I et II *l'alternative* suivante : *Ou bien* les systèmes inhomogènes transposés (Ia), (IIa) sont toujours résolubles, quelque soient leurs seconds membres $[f]$, $[g]$, *ou bien* les systèmes homogènes transposés (Ib), (IIb) possèdent des solutions (en même nombre) non identiquement nulles.

Pour montrer les analogues de ces théorèmes dans la théorie des équations intégrales, considérons les équations

(Ia) $\varphi(s) + \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt = f(s)$	(Ib) $\varphi(s) + \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt = 0$
(IIa) $\psi(s) + \int_a^b K(t, s)\psi(t)\,dt = g(s)$	(IIb) $\psi(s) + \int_a^b K(t, s)\psi(t)\,dt = 0$

(Ia) et (IIa) sont des équations inhomogènes à noyaux transposés. (Ib) et (IIb) sont les équations homogènes correspondantes; elles admettent les solutions triviales $\varphi(s) \equiv 0$, $\psi(s) \equiv 0$ que nous conviendrons de ne pas compter comme solutions. Nous admettrons pour simplifier que $K(s, t)$, $f(s)$, $g(s)$ sont des fonctions continues et nous exigerons des solutions $\varphi(s)$, $\psi(s)$ qu'elles soient aussi continues dans (a, b). La théorie de Fredholm permet alors d'établir les théorèmes analogues.

I. *Les équations intégrales homogènes transposées* (Ib), (IIb), *ont le même nombre* r *de solutions linéairement indépendantes.* r *est fini.*

II. *Lorsque* $r = 0$, *les équations intégrales inhomogènes transposées* (Ia), (IIa) *ont chacune une solution unique et bien déterminée, pour toutes fonctions* f(s), g(s).

III. *Lorsque* $r > 0$, *les équations intégrales inhomogènes* (Ia), (IIa) *n'ont en général pas de solution.* Soient

$$\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots, \varphi_r(s) ; \qquad \psi_1(s), \psi_2(s), \ldots, \psi_r(s)$$

deux systèmes complets de r solutions linéairement indépendantes de (Ib) et de (IIb). La solution générale de (Ib) est

$$\varphi(s) = c_1\varphi_1(s) + c_2\varphi_2(s) + \ldots + c_r\varphi_r(s)$$

et la solution générale de (IIb) est

$$\psi(s) = c_1\psi_1(s) + c_2\psi_2(s) + \ldots + c_r\psi_r(s)$$

$c_1, c_2, \ldots, c_r$ étant r constantes arbitraires. Pour que (Ia) soit résoluble, *il faut et il suffit* que $f(s)$ vérifie les r relations

$$\int_a^b f(s)\psi_1(s)\,ds = 0 , \quad \int_a^b f(s)\psi_2(s)\,ds = 0 , \ldots , \quad \int_a^b f(s)\psi_r(s)\,ds = 0 \qquad (14)$$

et de même, pour que (IIa) soit résoluble, *il faut et il suffit* que $g(s)$ vérifie les r relations

$$\int_a^b g(s)\varphi_1(s)\,ds = 0 , \quad \int_a^b g(s)\varphi_2(s)\,ds = 0 , \ldots , \quad \int_a^b g(s)\varphi_r(s)\,ds = 0 .$$

Si les relations (14) sont vérifiées, la solution générale de (Ia) est

$$\varphi(s) = \Phi(s) + c_1\varphi_1(s) + c_2\varphi_2(s) + \ldots + c_r\varphi_r(s) ,$$

$\Phi(s)$ étant une solution particulière quelconque et $c_1, c_2, \ldots, c_r$ r constantes arbitraires. De même, si les relations (15) sont véri-

fiées et si $\Psi(s)$ est une solution particulière quelconque de (IIa), la solution générale de cette équation est

$$\psi(s) = \Psi(s) + c_1\psi_1(s) + c_2\psi_2(s) + \ldots + c_r\psi_r(s) .$$

Il résulte donc encore des théorèmes I et II *l'alternative : Ou bien* les équations intégrales transposées inhomogènes (Ia) et (IIa) sont résolubles quelque soient leurs seconds membres $f(s)$, $g(s)$ *ou bien* les équations homogènes transposées (Ib) et (IIb) admettent des solutions non identiquement nulles. Cette alternative est d'une extrême importance pour les applications de la théorie des équations intégrales.

Les théorèmes indiqués plus haut sur les systèmes linéaires d'équations algébriques peuvent s'établir sans faire usage des déterminants. De même, leurs analogues de la théorie des équations intégrales, bien qu'obtenus pour la première fois par Fredholm par l'intermédiaire de ses séries, peuvent se démontrer directement. Mais, s'il s'agit, en algèbre, de trouver des critères pour déterminer dans quel cas de l'alternative on se trouve ou de calculer effectivement les solutions l'emploi des déterminants est nécessaire. Pour les introduire ici de manière à conserver une analogie encore plus étroite, nous aurons avantage à introduire un paramètre λ et à considérer non plus les systèmes (I) et (II) mais le système (10) que nous avons obtenu en exposant la méthode de Hilbert. Nous étudierons donc les systèmes transposés

$$\begin{array}{l|l}
(\mathrm{I}'a) : \; x_p - \lambda \sum_{q=1}^{n} k_{pq} x_q = f_p & (\mathrm{I}'b) : \; x_p - \lambda \sum_{q=1}^{n} k_{pq} x_q = 0 \\
 & \qquad\qquad (p = 1, 2, \ldots, n) \\
(\mathrm{II}'a) : \; y_p - \lambda \sum_{q=1}^{n} k_{qp} y_q = g_p & (\mathrm{II}'b) : \; y_p - \lambda \sum_{q=1}^{n} k_{qp} y_q = 0
\end{array}$$

La théorie des déterminants montre que pour que (I'a) soit résoluble quelque soit $[f]$, il faut et il suffit que le déterminant $D_n(\lambda)$ des coefficients des inconnues soit $\neq 0$ et que pour que le système (I'b) soit résoluble, il faut et il suffit que ce déterminant soit nul. Si nous remarquons que le déterminant du système (II') est encore égal à $D_n(\lambda)$ et que l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré $D_n(\lambda) = 0$ a n racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (finies ou infinies), nous voyons que

1. pour $\lambda \neq \lambda_p$, (I'a) et (II'a) sont toujours résolubles, quelque soient $[f]$, $[g]$.
2. pour $\lambda = \lambda_p$, (I'b) et (II'b) sont résolubles.
3. Dans le dernier cas, les solutions s'obtiennent au moyen des mineurs de $D_n(\lambda)$ et ν_p étant le rang du premier mineur de $D_n(\lambda)$

qui ne s'annule pas pour $\lambda = \lambda_p$, le nombre r_p des solutions de l'équation homogène est égal à $n - \nu_p$, pour $\lambda = \lambda_p$.

Les analogies avec les résultats de Fredholm sont immédiates. Nous prendrons, pour les voir, les systèmes suivants d'équations intégrales :

$$(\mathrm{I}'a) : \varphi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\varphi(t)dt = f(s) \qquad (\mathrm{I}'b) : \varphi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\varphi(t)\,dt = 0$$

$$(\mathrm{II}'a) : \psi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(t, s)\psi(t)dt = g(s) \qquad (\mathrm{II}'b) : \psi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(t, s)\psi(t)\,dt = 0$$

D'après Fredholm, l'alternative dépend d'une transcendante entière $\mathrm{D}(\lambda)$, donnée par (6), qui n'a donc que des zéros isolés appelés *paramètres singuliers* de l'équation intégrale. Alors

1. si $\mathrm{D}(\lambda) \neq 0$, $(\mathrm{I}'a)$ et $(\mathrm{II}'a)$ sont résolubles quelque soient $f(s)$, $g(s)$.
2. si $\mathrm{D}(\lambda) = 0$, $(\mathrm{I}'b)$ et $(\mathrm{II}'b)$ sont résolubles.
3. le nombre des solutions et leur calcul dans le cas 2) dépendent de séries entières qui sont les analogues des mineurs de $\mathrm{D}_n(\lambda)$.

Remarquons que $\mathrm{D}(\lambda)$ peut ne pas avoir de zéros; il est alors de la forme $\mathrm{D}(\lambda) = e^{h(\lambda)}$. Ce cas se présente en particulier pour un noyau $\mathrm{K}(s, t)$ tel que $\mathrm{K}(s, t) = 0$ pour $s \leqq t$. Dans ce cas l'équation intégrale (équation de Volterra) se réduit à

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^s \mathrm{K}(s, t)\varphi(t)\,dt = f(s)$$

et il est facile de vérifier que les séries (2) et (5) relatives à ce noyau convergent pour toute valeur finie de λ. L'équation homogène correspondante n'a jamais de solution (bornée).

3. Les analogies dans le cas du noyau symétrique.

Lorsque le noyau $\mathrm{K}(s, t)$ est une fonction symétrique de s, t : $\mathrm{K}(s, t) = \mathrm{K}(t, s)$ les quantités $k_{pq} = \mathrm{K}(t_p, t_q)$ sont telles que $k_{pq} = k_{qp}$. Les systèmes transposés (I') et (II') sont identiques et il suffit dans ce cas d'étudier l'un d'eux, par exemple (I'). La substitution $\lambda = \frac{1}{\mu}$ ramène l'équation $\mathrm{D}_n(\lambda) = 0$ à une équation bien connue sous le nom d'équation séculaire. Pour $n = 2, 3$ une équation de cette forme se présente dans la recherche des axes principaux des coniques et des quadriques (équation en « s ») et