Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 14 (1912)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA THÉORIE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES
Autor: Plancherel, M.
Kapitel: 3. Les analogies dans le cas du noyau symétrique.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14282

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

qui ne s'annule pas pour $\lambda = \lambda_p$, le nombre r_p des solutions de l'équation homogène est égal à $n - \nu_p$, pour $\lambda = \lambda_p$.

Les analogies avec les résultats de Fredholm sont immédiates. Nous prendrons, pour les voir, les systèmes suivants d'équations intégrales :

$$(\mathrm{I}'a) : \varphi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\varphi(t)dt = f(s) \qquad (\mathrm{I}'b) : \varphi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\varphi(t)\,dt = 0$$

$$(\mathrm{II}'a) : \psi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(t, s)\psi(t)dt = g(s) \qquad (\mathrm{II}'b) : \psi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(t, s)\psi(t)\,dt = 0$$

D'après Fredholm, l'alternative dépend d'une transcendante entière $\mathrm{D}(\lambda)$, donnée par (6), qui n'a donc que des zéros isolés appelés *paramètres singuliers* de l'équation intégrale. Alors

1. si $\mathrm{D}(\lambda) \neq 0$, $(\mathrm{I}'a)$ et $(\mathrm{II}'a)$ sont résolubles quelque soient $f(s)$, $g(s)$.
2. si $\mathrm{D}(\lambda) = 0$, $(\mathrm{I}'b)$ et $(\mathrm{II}'b)$ sont résolubles.
3. le nombre des solutions et leur calcul dans le cas 2) dépendent de séries entières qui sont les analogues des mineurs de $\mathrm{D}_n(\lambda)$.

Remarquons que $\mathrm{D}(\lambda)$ peut ne pas avoir de zéros; il est alors de la forme $\mathrm{D}(\lambda) = e^{h(\lambda)}$. Ce cas se présente en particulier pour un noyau $\mathrm{K}(s, t)$ tel que $\mathrm{K}(s, t) = 0$ pour $s \leqq t$. Dans ce cas l'équation intégrale (équation de Volterra) se réduit à

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^s \mathrm{K}(s, t)\varphi(t)\,dt = f(s)$$

et il est facile de vérifier que les séries (2) et (5) relatives à ce noyau convergent pour toute valeur finie de λ. L'équation homogène correspondante n'a jamais de solution (bornée).

3. Les analogies dans le cas du noyau symétrique.

Lorsque le noyau $\mathrm{K}(s, t)$ est une fonction symétrique de s, t : $\mathrm{K}(s, t) = \mathrm{K}(t, s)$ les quantités $k_{pq} = \mathrm{K}(t_p, t_q)$ sont telles que $k_{pq} = k_{qp}$. Les systèmes transposés (I') et (II') sont identiques et il suffit dans ce cas d'étudier l'un d'eux, par exemple (I'). La substitution $\lambda = \frac{1}{\mu}$ ramène l'équation $\mathrm{D}_n(\lambda) = 0$ à une équation bien connue sous le nom d'équation séculaire. Pour $n = 2, 3$ une équation de cette forme se présente dans la recherche des axes principaux des coniques et des quadriques (équation en « s ») et

l'on démontre que ses racines sont réelles. Ce fait est général ; de la symétrie $k_{pq} = k_{qp}$ résulte que *l'équation* $D_n(\lambda) = 0$ *a toutes ses racines réelles*. De plus, alors que dans le cas général $D_n(\lambda) = 0$ peut avoir toutes ses racines infinies, il existe ici *au moins une racine finie*. Notant par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les solutions de $D_n(\lambda) = 0$, chacune répétée un nombre de fois égal au nombre des solutions linéairement indépendantes de (I'b) pour cette valeur de λ, nous pourrons trouver n systèmes de valeurs

$$x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

tels que chacun d'eux soit solution de (I'b) pour la valeur correspondante $\lambda = \lambda_p$ et tels que

$$\sum_{r=1}^{n} x_r^{(p)} x_r^{(q)} = \delta_{pq} \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, n) \tag{15}$$

où $\delta_{pq} = 0$, si $p \neq q$ et $\delta_{pp} = 1$. La substitution

$$y_p = \sum_{r=1}^{n} x_r^{(p)} x_r \qquad (p = 1, 2, \ldots, n) \tag{16}$$

est alors une substitution orthogonale, c'est-à-dire qu'elle laisse invariante la somme $\sum_{p=1}^{n} x_p^2$

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 .$$

Cette substitution transforme la forme quadratique

$$\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} k_{pq} x_p x_q = x_1^2 + 2x_1 x_2 + \ldots$$

en une somme algébrique de carrés

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{\left[x_1^{(p)} x_1 + x_2^{(p)} x_2 + \ldots + x_n^{(p)} x_n\right]^2}{\lambda_p} = \sum_{p=1}^{n} \frac{y_p^2}{\lambda_p} . \tag{17}$$

Nous obtenons ainsi la forme canonique de la forme quadratique. Cette forme canonique est bien connue pour $n = 2, 3$, la transformation effectuée étant alors la transformation d'une conique ou d'une quadrique à ses axes principaux. Sachant résoudre l'équa-

tion homogène (I'b) on pourra facilement exprimer la solution de (I'a) en fonction des seconds membres et des quantités $x_p^{(r)}$. Nous n'insistons pas là-dessus.

Indiquons maintenant les analogies. Nous considérons pour cela les équations à noyau symétrique

$$(\mathrm{I}'a) : \quad \varphi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\varphi(t)\,dt = f(s) \quad ; \qquad (\mathrm{I}'b) : \quad \varphi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\varphi(t)\,dt = 0$$

On peut démontrer que toutes les racines de $\mathrm{D}(\lambda) = 0$ sont *réelles*. En d'autres termes, l'équation homogène (I'b) n'admet de solutions que pour des valeurs réelles de λ. De plus $\mathrm{D}(\lambda) = 0$ possède au moins une racine réelle finie. Il existe donc *au moins une* valeur finie de λ, pour laquelle (I'b) est résoluble. Soient encore λ_1, λ_2, ... λ_n, ... les zéros de $\mathrm{D}(\lambda)$, chacun d'eux étant répété dans cette suite autant de fois que l'équation (I'b) a de solutions linéairement indépendantes pour cette valeur de λ; nous pourrons faire correspondre à chaque λ_p une fonction $\varphi_p(s)$ vérifiant la relation

$$\varphi_p(s) - \lambda_p \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\varphi_p(t)\,dt = 0 \tag{18}$$

et telle que

$$\int_a^b \varphi_p(s)\varphi_q(s)\,ds = \delta_{pq} \quad , \qquad (p, q = 1, 2, 3, \ldots) \; . \tag{19}$$

Ces relations, analogues des relations (15), expriment que les solutions de l'équation intégrale homogène (I'b) relatives à deux valeurs différentes λ_p, λ_q sont orthogonales et que le système complet des solutions

$$\varphi_1(s) \, , \; \varphi_2(s) \, , \; \ldots \qquad \varphi_p(s) \, , \; \ldots$$

forme un système orthogonal normé de fonctions pour l'intervalle (a, b). L'analogue de la forme (17) est ici la formule

$$\int_a^b \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\psi(s)\psi(t)\,ds\,dt = \sum_p \frac{\left[\int_a^b \psi(s)\varphi_p(s)\,ds\right]^2}{\lambda_p} \tag{20}$$

où au second membre la sommation est étendue à toutes les valeurs du paramètre singulier λ_p. De cette relation découlent des

propriétés très importantes relatives à la forme canonique

$$K(s, t) = \sum_p \frac{\varphi_p(s)\varphi_p(t)}{\lambda_p} \tag{21}$$

du noyau et au développement d'une fonction arbitraire $f(s)$ en série de la forme

$$f(s) = f_1\varphi_1(s) + f_2\varphi_2(s) + \dots \qquad f_p = \int_a^b f(s)\varphi_p(s)\,ds \tag{22}$$

procédant suivant les solutions de l'équation (I'b) (autofonctions ou fonctions fondamentales). La relation (21) a lieu lorsque la série du second membre est convergente et E. Schmidt a montré qu'un développement (22) uniformément et absolument convergent est valable pour toute fonction $f(s)$ susceptible d'une représentation de la forme

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)g(t)\,dt \ . \tag{23}$$

Remarquons, en terminant, que la solution de (I'a) s'exprime aisément au moyen des solutions $\varphi_p(s)$ de (I'b). On a, en effet,

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_p \frac{f_p}{\lambda_p - \lambda}\varphi_p(s) \ , \qquad f_p = \int_a^b f(s)\varphi_p(s)\,ds \ .$$

4. Les équations intégrales singulières.

Nous venons de voir l'étroite analogie qui existe entre la théorie des systèmes d'équations algébriques linéaires et celle des équations intégrales linéaires de seconde espèce. Remarquons encore que la plupart des résultats de la théorie de Fredholm subsistent encore dans le cas où $K(s, t)$ présente des singularités infinies mais où l'un des noyaux itérés $K_n(s, t)$ est fini. De même, dans le cas du noyau symétrique, les principaux résultats sont encore vrais si $\int_a^b \int_a^b [K(s, t)]^2\,ds\,dt$ est finie.

Dans ses 4me et 5me notes sur la théorie des équations intégrales, Hilbert a montré la raison profonde de cette analogie, il en a trouvé les limites et par le même coup il a enrichi d'une nouvelle méthode la théorie des équations intégrales. Cette méthode est d'autant plus importante qu'elle permet d'aborder la théorie des