Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 14 (1912)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA THÉORIE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES
Autor: Plancherel, M.
Kapitel: 4. Les équations intégrales singulières.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14282

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

propriétés très importantes relatives à la forme canonique

$$K(s, t) = \sum_p \frac{\varphi_p(s)\varphi_p(t)}{\lambda_p} \tag{21}$$

du noyau et au développement d'une fonction arbitraire $f(s)$ en série de la forme

$$f(s) = f_1\varphi_1(s) + f_2\varphi_2(s) + \dots \qquad f_p = \int_a^b f(s)\varphi_p(s)\,ds \tag{22}$$

procédant suivant les solutions de l'équation (I'b) (autofonctions ou fonctions fondamentales). La relation (21) a lieu lorsque la série du second membre est convergente et E. Schmidt a montré qu'un développement (22) uniformément et absolument convergent est valable pour toute fonction $f(s)$ susceptible d'une représentation de la forme

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)g(t)\,dt \ . \tag{23}$$

Remarquons, en terminant, que la solution de (I'a) s'exprime aisément au moyen des solutions $\varphi_p(s)$ de (I'b). On a, en effet,

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_p \frac{f_p}{\lambda_p - \lambda}\varphi_p(s) \ , \qquad f_p = \int_a^b f(s)\varphi_p(s)\,ds \ .$$

4. Les équations intégrales singulières.

Nous venons de voir l'étroite analogie qui existe entre la théorie des systèmes d'équations algébriques linéaires et celle des équations intégrales linéaires de seconde espèce. Remarquons encore que la plupart des résultats de la théorie de Fredholm subsistent encore dans le cas où $K(s, t)$ présente des singularités infinies mais où l'un des noyaux itérés $K_n(s, t)$ est fini. De même, dans le cas du noyau symétrique, les principaux résultats sont encore vrais si $\int_a^b \int_a^b [K(s, t)]^2\,ds\,dt$ est finie.

Dans ses 4me et 5me notes sur la théorie des équations intégrales, Hilbert a montré la raison profonde de cette analogie, il en a trouvé les limites et par le même coup il a enrichi d'une nouvelle méthode la théorie des équations intégrales. Cette méthode est d'autant plus importante qu'elle permet d'aborder la théorie des

équations intégrales à noyau singulier, c'est-à-dire à noyau présentant des singularités assez élevées pour échapper aux méthodes de Fredholm et de Schmidt. Nous ne pouvons ici que donner un rapide aperçu de ses fondements.

Un système de fonctions $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ... définies dans un intervalle (a, b), de carré intégrable dans cet intervalle, est *orthogonal* relativement à (a, b), si l'intégrale du produit de deux fonctions différentes du système est toujours nulle : $\int_a^b \varphi_p(s)\varphi_q(s)\,ds = 0$, $p \neq q$. Un tel système est toujours dénombrable. Nous le *normerons* par la condition $\int_a^b [\varphi_p(s)]^2\,ds = 1$. On a donc

$$\int_a^b \varphi_p(s)\varphi_q(s)\,ds = \delta_{pq} .$$

Il sera dit *fermé*, si toutes les relations

$$\int_a^b h(s)\varphi_p(s)\,ds = 0 , \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

ne sont vérifiées simultanément que par la seule fonction $h(s) \equiv 0$. Les fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos s}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin s}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2s}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2s}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

forment, par exemple, un système orthogonal fermé et normé pour l'intervalle $(0, 2\pi)$. $f(s)$ étant une fonction de carré intégrable dans (a, b), on peut former les constantes (coefficients de Fourier de $f(s)$ relativement au système $[\varphi_p(s)]$)

$$f_p = \int_a^b f(s)\varphi_p(s)\,ds , \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

et la suite $[f_p]$ vérifie l'inégalité

$$\sum_p f_p^2 \leqq \int_a^b [f(s)]^2\,ds$$

inégalité dans laquelle le signe $=$ est à prendre lorsque le système $[\varphi_p(s)]$ est fermé. Dans ce dernier cas, on a plus générale-

ment,

$$\int_a^b f(s)\,g(s)\,ds = \sum_p f_p\,g_p \tag{24}$$

$f(s)$ et $g(s)$ étant deux fonctions quelconques de carré intégrable, f_p, g_p leurs coefficients de Fourier.

La somme des carrés des coefficients de Fourier d'une fonction de carré intégrable est donc convergente. Inversement, MM. F. Riesz et E. Fischer ont montré qu'étant donnée une suite quelconque de constantes réelles $f_1, f_2, \ldots,$ telles que $\sum_p f_p^2$ converge, il existe au moins une fonction $f(s)$ de carré intégrable admettant ces constantes comme coefficients de Fourier relativement au système orthogonal normé $[\varphi_p(s)]$. En particulier, cette fonction $f(s)$ est unique (à une fonction d'intégrale nulle près) lorsque le système $[\varphi_p(s)]$ est fermé. Remarquons cependant que le théorème de Riesz-Fischer n'est vrai sans exception que lorsqu'on étend la notion d'intégrale comme l'a fait Lebesgue. Nous prendrons donc dans tout ce § les intégrales au sens de Lebesgue.

Prenons maintenant l'équation intégrale

$$\varphi(s) - \lambda\int_a^b K(s,\,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s) \tag{25}$$

et supposons $f(s)$ de carré intégrable dans (a, b) et $K(s, t)$ symétrique tel que

$$\int_a^b\int_a^b K(s,\,t)\,g(s)\,g(t)\,ds\,dt$$

existe pour toute fonction $g(s)$ de carré intégrable. Soit $[\varphi_p(s)]$ un système orthogonal fermé et normé relativement à l'intervalle (a, b). Notons

$$\begin{gathered} x_p = \int_a^b \varphi(s)\,\varphi_p(s)\,ds\,, \qquad k_{pq} = \int_a^b\int_a^b K(s,\,t)\,\varphi_p(s)\,\varphi_q(t)\,ds\,dt = k_{qp}\,, \\ f_p = \int_a^b f(s)\,\varphi_p(s)\,ds\,, \end{gathered} \tag{26}$$

multiplions l'équation intégrale par $\varphi_p(s)$ et intégrons dans (a, b)

en nous servant de la formule de Riesz (24). Il vient

$$x_p - \lambda \sum_{q=1}^{\infty} k_{pq} x_q = f_p \ , \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (27)$$

C'est un système d'une infinité d'équations du 1er degré à une infinité d'inconnues $x_1, x_2, \ldots$. Si ce système admet une solution (x_p) de somme des carrés convergente, on pourra lui faire correspondre par le théorème de Riesz-Fischer une fonction $\varphi(s)$, de carré intégrable, que l'on démontrera être solution de l'équation intégrale. *Il y a donc équivalence entre la résolution de l'équation intégrale et celle d'un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.* On est ainsi amené à l'étude de tels systèmes d'équations et à celle des formes quadratiques qui en dépendent. Cette étude a été faite par Hilbert. Tœplitz et Hellinger, dans leurs recherches ultérieures, ont apporté des contributions nouvelles à cette théorie, ils l'ont surtout simplifiée en réduisant à un minimum les questions de convergence qui se posent inévitablement dans une telle théorie, et en éclairant mieux la face algébrique du problème. L'hypothèse faite plus haut sur $K(s, t)$ revient à dire que la forme quadratique à une infinité de variables $\sum_{p,q} k_{pq} x_p x_q$ est *bornée,* c'est-à-dire telle que

$$\left| \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} k_{pq} x_p x_q \right| < M$$

pour tout système de valeurs

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqq 1 \ , \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \ .$$

M étant une constante convenablement choisie. C'est à l'étude des formes bornées que se limite la théorie de Hilbert. Hilbert considère comme solutions (et cela est naturel, d'après le théorème de Riesz-Fischer) les seules solutions $x_1, x_2, \ldots$ à somme des carrés convergente. Sa théorie montre alors que l'analogie trouvée plus haut ne subsiste plus en général. Ainsi, il peut y avoir des valeurs de λ, pour lesquelles les équations homogènes correspondantes de (27) possèdent une infinité dénombrable de solutions. Les valeurs de λ où le système (27) n'est pas résoluble sont encore réelles et il en existe encore au moins une, mais elles peuvent ne pas être isolées et former un ensemble ayant la puissance du continu. Dans ces cas, *l'alternative n'existe plus :* il y a des valeurs de λ pour lesquelles ni les équations (27) ni les équations homogènes corres-

pondantes n'ont de solutions à somme des carrés convergente. Par suite, les valeurs nécessairement réelles de λ où l'équation intégrale (25) n'a pas de solution de carré intégrable peuvent donc, dans le cas général, ne pas être isolées et former un ensemble ayant la puissance du continu et *l'alternative n'existera plus :* il y aura des valeurs de λ où ni l'équation (25) ni l'équation homogène correspondante n'admettent de solutions de carré intégrable dans (a, b). Il se présente par contre des *faits nouveaux* sur lesquels je ne puis insister ici[1]. Je me bornerai pour finir, à signaler que la théorie des formes quadratiques à une infinité de variables permet de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'alternative ait encore lieu, qu'elle retrouve ainsi les résultats de Fredholm et de Schmidt sur les noyaux symétriques et que de plus elle permet d'aborder des équations intégrales inaccessibles aux méthodes de ces deux savants.

M. Plancherel (Fribourg).

LES RECTRICES. ÉTUDE DE GÉOMÉTRIE PHYSIQUE

Sommaire : 1. Les rectrices. — 2. Les rectrices et la surface de l'onde. — 3. Applications pratiques des rectrices. — 4. Les rectrices centrales des quadriques. — 5. La correspondance logarithmique entre quadriques et cônes recteurs. — 6. Les rectrices et la représentation des phénomènes. — 7. La dualité géométrique et les rectrices. — 8. La matière élastique et le complexe du second ordre. — Les lignes de rupture. — 10. La rectrice chimique. — 11. La loi cissoïdale atomique.

1. **Les Rectrices.** — Quand on examine une glace étamée recouverte d'une poussière légère, on observe que les grains de poussière paraissent s'aligner vers l'œil. L'effet est, dans une certaine mesure, d'autant plus apparent que la glace est plus épaisse. Si la glace, au lieu d'être plane, constitue une surface courbe, aux alignements rectilignes correspondent des courbes tracées sur la surface. Il est facile d'expliquer l'effet d'alignement par la réflexion de chaque grain de poussière.

On voit aisément que ces courbes sont en somme les trajectoires

[1] Cf. E. Hellinger, *Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlich vielen Veränderlichen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 136 (1909), pp. 210-271].