EXTRACTION D'UNE RACINE QUELCONQUE D'UN NOMBRE RÉEL A

Autor(en): **Baatard, Lucien**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1912)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-14281

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

EXTRACTION D'UNE RACINE QUELCONQUE D'UN NOMBRE RÉEL A [1]

I. — A est une puissance $n^{\text{ième}}$ parfaite.

Posons

$$A = a^n .$$

1. — Considérons une valeur approchée *par excès* de a et représentons-la par $a + \alpha$.

On a :

$$\frac{A}{(a+\alpha)^{n-1}} = \frac{a^n}{a^{n-1} + \frac{n-1}{1}\alpha a^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}\alpha^2 a^{n-3} + \ldots + \alpha^{n-1}}$$

$$= a - (n-1)\alpha + \frac{R}{(a+\alpha)^{n-1}} ,$$

en posant

$$R = \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\alpha^2 a^{n-2} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\alpha^3 a^{n-3} + \ldots$$

$$+ \frac{ln(n-1)(n-2)\ldots(n-l)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(l+1)}\alpha^{l+1} a^{n-(l+1)} + \ldots + (n-1)\alpha^n .$$

Dans le calcul littéral, la division s'arrête ici ; mais dans le calcul numérique la division $\frac{R}{(a+\alpha)^{n-1}}$ pourra donner encore quelques unités.

Si l'on écrit

$$\frac{R}{(a+\alpha)^{n-1}} = \varepsilon + \frac{r}{(a+\alpha)^{n-1}} \qquad \left\{ r < (a+\alpha)^{n-1} \right\} ,$$

on a en résumé

$$\frac{A}{(a+\alpha)^{n-1}} = a - (n-1)\alpha + \varepsilon + \frac{r}{(a+\alpha)^{n-1}} \qquad \left\{ r < (a+\alpha)^{n-1} \right\} .$$

[1] Communication présentée à Soleure, le 1er août 1911, à la Section mathématique de la 94e réunion de la Société helvétique des Sciences naturelles.

En additionnant le quotient incomplet $a - (n-1)\alpha + \varepsilon$ avec $(n-1)(a+\alpha)$ et divisant le tout par n, on obtient

$$\frac{a - (n-1)\alpha + \varepsilon + (n-1)(a+\alpha)}{n} = a + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Le quotient incomplet de cette division est la racine cherchée a ou, si $\varepsilon > n$, une valeur approchée par excès de cette racine.

Applications.

1. — $\sqrt[5]{1\,889\,568}$

$a + \alpha = 20$; $20^4 = 160000$; $1889568 : 160000 = 11$ quot. inc.

$$\frac{11 + 4 \,.\, 20}{5} = 18 \text{ quot. inc.} = \sqrt[5]{1889568}$$

2. — $\sqrt[3]{79507}$

$a + \alpha = 50$ $79507 : 50^2 = 31$ quot. inc.

$$\frac{31 + 2 \,.\, 50}{3} = 43 \text{ quot. inc.} = \sqrt[3]{79507}$$

En prenant comme valeur approchée 60, au lieu de 50, on obtient

$79507 : 60^2 = 22$ quot. inc. ; $\dfrac{22 + 2 \,.\, 60}{3} = 47$ quot. inc. ;

le calcul donne une valeur *approchée par excès* de la racine.

3. — $\sqrt{917764}$

$a + \alpha = 1000$; $\dfrac{1000 + 917}{2} = 958$ quot. inc. $= \sqrt{917764}$.

2. — Considérons maintenant une valeur approchée *par défaut* de a et représentons-la par $a - \alpha$.

On a :

$$\frac{A}{(a-\alpha)^{n-1}} = \frac{a^n}{a^{n-1} - \frac{n-1}{1}\alpha a^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,,\,2}\alpha^2 a^{n-3} - \ldots \pm a^{n-1}}$$

$$= a + (n-1)\alpha + \frac{R'}{(a-\alpha)^{n-1}},$$

en posant

$$R' = \frac{n(n-1)}{1\,,\,2}\alpha^2 a^{n-2} - \frac{2n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\alpha^3 a^{n-3} + \dots$$

$$\pm \frac{ln(n-1)(n-2)\dots(n-l)}{1\,,\,2\,,\,3\dots(l+1)}\alpha^{l+1} a^{n-(l+1)} \mp \dots \pm (n-1)\alpha^n .$$

R′ est-il positif?

On peut écrire

$$R' = a^n - [a + (n-1)\alpha](a-\alpha)^{n-1}$$

$$= [(a-\alpha)+\alpha]^n - [(a-\alpha)^n + n\alpha(a-\alpha)^{n-1}] .$$

Or

$$[(a-\alpha)+\alpha]^n = (a-\alpha)^n + \frac{n}{1}\alpha(a-\alpha)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,,\,2}\alpha^2(a-\alpha)^{n-2}$$

$$+ \dots + \alpha^n .$$

Donc

$$R' = \frac{n(n-1)}{1\,,\,2}\alpha^2(a-\alpha)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,,\,2\,,\,3}\alpha^3(a-\alpha)^{n-3} + \dots + \alpha^n ;$$

R′ *est toujours positif.*

Comme on peut avoir $R' > (a-\alpha)^{n-1}$, posons

$$\frac{R'}{(a-\alpha)^{n-1}} = \varepsilon' + \frac{r'}{(a-\alpha)^{n-1}} \qquad \left\{ r' < (a-\alpha)^{n-1} \right\} .$$

En opérant comme avec la valeur approchée par excès, on obtient

$$\frac{a + (n-1)\alpha + \varepsilon' + (n-1)(a-\alpha)}{n} = a + \frac{\varepsilon'}{n}$$

et l'on aboutit à la même conclusion.

Applications.

1. — $\sqrt[6]{191\ 102\ 976}$

$$a - \alpha = 20 ; \qquad 191\ 102\ 976 : 20^5 = 59 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{59 + 5\,.\,20}{6} = 26 \text{ quot. inc.}$$

$26^5 = 11\ 881\ 376$; 26 est plus grand que la racine cherchée.

Répétant l'opération avec 26, on obtient :

$$191\,102\,976 : 11\,881\,376 = 16 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{16 + 5 . 26}{6} = 24 \text{ quot. inc.} = \sqrt[6]{191\,102\,976} .$$

2. — $\sqrt[4]{131\,079\,601}$

$$a - \alpha = 100 \; ; \qquad 131\,079\,601 : 100^3 = 131 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{131 + 3 . 100}{4} = 107 \text{ quot. inc.} = \sqrt[4]{131\,079\,601} .$$

3. — $\sqrt{4\,613\,904}$

$$a - \alpha = 2000 \; ; \qquad 4\,613\,904 : 2000 = 2306 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{2306 + 2000}{2} = 2153 .$$

Il faut répéter l'opération :

$$4\,613\,904 : 2153 = 2143 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{2143 + 2153}{2} = 2148 = \sqrt{4\,613\,904} .$$

Formule (ω). Représentons par $a \pm \alpha$ une valeur approchée par excès ou par défaut de $\sqrt[n]{A}$ et par p le quotient incomplet de la division de A par $(a \pm \alpha)^{n-1}$.

Il résulte de ce qui précède que le nombre v_1, donné par la formule (ω)

$$v_1 = \frac{p + (n - 1)(a \pm \alpha)}{n} \text{ quot. inc. ,}$$

est ou $\sqrt[n]{A}$ ou une valeur approchée par excès de $\sqrt[n]{A}$.

Si l'on n'obtient pas tout de suite $\sqrt[n]{A}$, on opère sur v_1 comme sur $a \pm \alpha$ et ainsi de suite.

II. — $\sqrt[n]{A}$ est un nombre irrationnel.

Si l'on représente par x et $x + 1$ les deux nombres consécutifs entre les $n^{\text{ièmes}}$ puissances desquels se trouve A, la formule (ω) donne x ou une valeur approchée par excès de x.

Pour s'en rendre compte, il suffit de poser

$$A = x^n + h$$

et de remplacer a par x dans les calculs précédents ; h s'ajoute à R ou R′ et la conclusion pour a subsiste pour x.

Ex. : $\sqrt[3]{72\,000}$

$$a - \alpha = 40 \; ; \qquad 72\,000 : 40^2 = 45 \; ; \qquad \frac{45 + 2 \,.\, 40}{3} = 41 \text{ quot. inc.}$$

$$41^3 = 68\,921 < 72\,000$$

$$42^3 = 74\,088 > 72\,000 \; .$$

Pour obtenir $\sqrt[n]{A}$ à moins de $\frac{1}{z}$ près, par défaut, on a la relation

$$\sqrt[n]{A} = \frac{1}{z}\sqrt[n]{z^n \,.\, A} \; ;$$

on calcule, comme ci-dessus, $\sqrt[n]{z^n \,.\, A}$ à moins d'une unité près, par défaut, et on divise le résultat par z.

Ex. : Soit à calculer $\sqrt[3]{10}$ à moins de $\frac{1}{100}$ près.

$$\sqrt[3]{10} = \frac{1}{100}\sqrt[3]{10\,000\,000}$$

$$a - \alpha = 200 \; ; \quad 10\,000\,000 : 200^2 = 250 \; ; \quad \frac{250 + 2 \,.\, 200}{3} = 216 \text{ quot. inc.}$$

$$216^2 = 46\,656$$

$$10\,000\,000 : 46\,656 = 214 \text{ quot. inc.} \; ; \quad \frac{214 + 2 \,.\, 216}{3} = 215 \text{ quot. inc.}$$

$$2{,}15 = \sqrt[3]{10} \text{ , à moins de } \frac{1}{100} \text{ près, par défaut.}$$

Utilisation des quotients complets : *formule* (ω'). En prenant les quotients complets p' et y_1 des divisions qui donnent p et v_1, on obtient un nombre fractionnaire qui exprime la valeur de $\sqrt[n]{A}$ avec une erreur par excès ; l'application du même calcul à y_1 donnera un nouveau nombre fractionnaire $y_2 > \sqrt[n]{A}$ mais $< y_1$; on obtiendra de même $y_3 > \sqrt[n]{A}$ mais $< y_2$, et ainsi de suite.

Ce calcul se représente par la formule (ω')

$$y_1 = \frac{p' + (n-1)(a \pm \alpha)}{n}.$$

L'erreur diminue assez fortement quand on passe de l'un de ces résultats au suivant.

A titre d'exemple, reprenons $\sqrt[3]{10}$.

$$a - \alpha = 2 \; ; \qquad \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \; ; \qquad \frac{\frac{5}{2} + 2.2}{3} = \frac{13}{6} = 2{,}1666 \ldots$$

$$10 : \left(\frac{13}{6}\right)^2 = \frac{360}{169} \; ; \qquad \frac{\frac{360}{169} + \frac{2.13}{6}}{3} = \frac{3277}{1521} = 2{,}1545 \ldots$$

On sait que $\sqrt[3]{10} = 2{,}1544 \ldots.$

Racine carrée. L'application des formules (ω) et (ω') à la racine carrée donne lieu à diverses remarques que je laisse de côté dans cet article.

Je me bornerai à démontrer, à l'aide de quelques exemples, la supériorité de (ω') — comme simplicité et rapidité — sur le calcul au moyen du développement de $\sqrt{A}$ en fraction continue.

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}$$

Réduites :

$$\frac{1}{1} \; ; \quad \frac{3^*}{2} \; ; \quad \frac{7}{5} \; ; \quad \frac{17^{**}}{12} \; ; \quad \frac{41}{29} \; ; \quad \frac{99}{70} \; ; \quad \frac{239}{169} \; ; \quad \frac{577^{***}}{408} \; ; \quad \frac{1393}{985} \; ; \quad \frac{3363}{2378} \; ;$$

$$\frac{8119}{5741} \; ; \quad \frac{19601}{13860} \; ; \quad \frac{47321}{33461} \; ; \quad \frac{114243}{80782} \; ; \quad \frac{275807}{195025} \; ; \quad \frac{665857^{***}}{470832} \; ; \ldots$$

(ω') $$\frac{3}{2} \; ; \quad \frac{17}{12} \; ; \quad \frac{577}{408} \; ; \quad \frac{665857}{470832} \; ; \ldots$$

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}$$

Réduites :

$$\frac{1}{1};\quad \frac{2^{*}}{1};\quad \frac{5}{3};\quad \frac{7^{**}}{4};\quad \frac{19}{11};\quad \frac{26}{15};\quad \frac{71}{41};\quad \frac{97^{***}}{56};\quad \frac{265}{153};\quad \frac{362}{209};\quad \frac{989}{571};$$

$$\frac{1351}{780};\quad \frac{3691}{2131};\quad \frac{5042}{2911};\quad \frac{13775}{7953};\quad \frac{18817^{****}}{10864};\ \ldots$$

(ω') $$\frac{2}{1};\quad \frac{7}{4};\quad \frac{97}{56};\quad \frac{18817}{10864};\ \ldots$$

$$\sqrt{11} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \text{etc.}}}}$$

Réduites :

$$\frac{3}{1};\quad \frac{10^{*}}{3};\quad \frac{63}{19};\quad \frac{199^{**}}{60};\quad \frac{1257}{379};\quad \frac{3970}{1197};\quad \frac{25077}{7561};\quad \frac{79201^{***}}{23880};\ \ldots$$

(ω') $$\frac{10}{3};\quad \frac{199}{60};\quad \frac{79201}{23880};\ \ldots$$

$$\sqrt{15} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}$$

Réduites :

$$\frac{3}{1};\quad \frac{4}{1};\quad \frac{27}{7};\quad \frac{31^{**}}{8};\quad \frac{213}{55};\quad \frac{244}{63};\quad \frac{1677}{433};\quad \frac{1921^{***}}{496};$$

(ω') $a - \alpha = 3$ $$\frac{4}{1};\quad \frac{31}{8};\quad \frac{1921}{496};\ \ldots$$

$a + \alpha = 4$ $$\frac{31}{8};\quad \frac{1921}{496};\ \ldots$$

Dans ces exemples, (ω') fournit les réduites de rang 2^m.
Ce n'est cependant pas toujours le cas.

Lucien Baatard (Genève).