I. —A est une puissance nième parfaite.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1912)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

EXTRACTION D'UNE RACINE QUELCONQUE D'UN NOMBRE RÉEL A [1]

I. — A est une puissance $n^{\text{ième}}$ parfaite.

Posons

$$A = a^n .$$

1. — Considérons une valeur approchée *par excès* de a et représentons-la par $a + \alpha$.

On a :

$$\frac{A}{(a+\alpha)^{n-1}} = \frac{a^n}{a^{n-1} + \frac{n-1}{1}\alpha a^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}\alpha^2 a^{n-3} + \ldots + \alpha^{n-1}}$$

$$= a - (n-1)\alpha + \frac{R}{(a+\alpha)^{n-1}} ,$$

en posant

$$R = \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\alpha^2 a^{n-2} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\alpha^3 a^{n-3} + \ldots$$

$$+ \frac{ln(n-1)(n-2)\ldots(n-l)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(l+1)}\alpha^{l+1} a^{n-(l+1)} + \ldots + (n-1)\alpha^n .$$

Dans le calcul littéral, la division s'arrête ici ; mais dans le calcul numérique la division $\frac{R}{(a+\alpha)^{n-1}}$ pourra donner encore quelques unités.

Si l'on écrit

$$\frac{R}{(a+\alpha)^{n-1}} = \varepsilon + \frac{r}{(a+\alpha)^{n-1}} \qquad \left\{ r < (a+\alpha)^{n-1} \right\} ,$$

on a en résumé

$$\frac{A}{(a+\alpha)^{n-1}} = a - (n-1)\alpha + \varepsilon + \frac{r}{(a+\alpha)^{n-1}} \qquad \left\{ r < (a+\alpha)^{n-1} \right\} .$$

[1] Communication présentée à Soleure, le 1er août 1911, à la Section mathématique de la 94e réunion de la Société helvétique des Sciences naturelles.

En additionnant le quotient incomplet $a - (n-1)\alpha + \varepsilon$ avec $(n-1)(a+\alpha)$ et divisant le tout par n, on obtient

$$\frac{a - (n-1)\alpha + \varepsilon + (n-1)(a+\alpha)}{n} = a + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Le quotient incomplet de cette division est la racine cherchée a ou, si $\varepsilon > n$, une valeur approchée par excès de cette racine.

Applications.

1. — $\sqrt[5]{1\,889\,568}$

$a + \alpha = 20$; $20^4 = 160000$; $1889568 : 160000 = 11$ quot. inc.

$$\frac{11 + 4 \,.\, 20}{5} = 18 \text{ quot. inc.} = \sqrt[5]{1889568}$$

2. — $\sqrt[3]{79507}$

$a + \alpha = 50$ $79507 : 50^2 = 31$ quot. inc.

$$\frac{31 + 2 \,.\, 50}{3} = 43 \text{ quot. inc.} = \sqrt[3]{79507}$$

En prenant comme valeur approchée 60, au lieu de 50, on obtient

$79507 : 60^2 = 22$ quot. inc. ; $\dfrac{22 + 2 \,.\, 60}{3} = 47$ quot. inc. ;

le calcul donne une valeur *approchée par excès* de la racine.

3. — $\sqrt{917764}$

$a + \alpha = 1000$; $\dfrac{1000 + 917}{2} = 958$ quot. inc. $= \sqrt{917764}$.

2. — Considérons maintenant une valeur approchée *par défaut* de a et représentons-la par $a - \alpha$.

On a :

$$\frac{A}{(a-\alpha)^{n-1}} = \frac{a^n}{a^{n-1} - \frac{n-1}{1}\alpha a^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,,\,2}\alpha^2 a^{n-3} - \ldots \pm a^{n-1}}$$

$$= a + (n-1)\alpha + \frac{R'}{(a-\alpha)^{n-1}},$$

en posant

$$R' = \frac{n(n-1)}{1\,,\,2}\alpha^2 a^{n-2} - \frac{2n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\alpha^3 a^{n-3} + \dots$$

$$\pm \frac{ln(n-1)(n-2)\dots(n-l)}{1\,,\,2\,,\,3\dots(l+1)}\alpha^{l+1} a^{n-(l+1)} \mp \dots \pm (n-1)\alpha^n .$$

R′ est-il positif?

On peut écrire

$$R' = a^n - [a + (n-1)\alpha](a-\alpha)^{n-1}$$

$$= [(a-\alpha)+\alpha]^n - [(a-\alpha)^n + n\alpha(a-\alpha)^{n-1}] .$$

Or

$$[(a-\alpha)+\alpha]^n = (a-\alpha)^n + \frac{n}{1}\alpha(a-\alpha)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,,\,2}\alpha^2(a-\alpha)^{n-2}$$

$$+ \dots + \alpha^n .$$

Donc

$$R' = \frac{n(n-1)}{1\,,\,2}\alpha^2(a-\alpha)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,,\,2\,,\,3}\alpha^3(a-\alpha)^{n-3} + \dots + \alpha^n ;$$

R′ *est toujours positif.*

Comme on peut avoir $R' > (a-\alpha)^{n-1}$, posons

$$\frac{R'}{(a-\alpha)^{n-1}} = \varepsilon' + \frac{r'}{(a-\alpha)^{n-1}} \qquad \left\{ r' < (a-\alpha)^{n-1} \right\} .$$

En opérant comme avec la valeur approchée par excès, on obtient

$$\frac{a + (n-1)\alpha + \varepsilon' + (n-1)(a-\alpha)}{n} = a + \frac{\varepsilon'}{n}$$

et l'on aboutit à la même conclusion.

Applications.

1. — $\sqrt[6]{191\ 102\ 976}$

$$a - \alpha = 20 ; \qquad 191\ 102\ 976 : 20^5 = 59 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{59 + 5\,.\,20}{6} = 26 \text{ quot. inc.}$$

$26^5 = 11\ 881\ 376$; 26 est plus grand que la racine cherchée.

Répétant l'opération avec 26, on obtient :

$$191\,102\,976 : 11\,881\,376 = 16 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{16 + 5 . 26}{6} = 24 \text{ quot. inc.} = \sqrt[6]{191\,102\,976} .$$

2. — $\sqrt[4]{131\,079\,601}$

$$a - \alpha = 100 \; ; \qquad 131\,079\,601 : 100^3 = 131 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{131 + 3 . 100}{4} = 107 \text{ quot. inc.} = \sqrt[4]{131\,079\,601} .$$

3. — $\sqrt{4\,613\,904}$

$$a - \alpha = 2000 \; ; \qquad 4\,613\,904 : 2000 = 2306 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{2306 + 2000}{2} = 2153 .$$

Il faut répéter l'opération :

$$4\,613\,904 : 2153 = 2143 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{2143 + 2153}{2} = 2148 = \sqrt{4\,613\,904} .$$

Formule (ω). Représentons par $a \pm \alpha$ une valeur approchée par excès ou par défaut de $\sqrt[n]{A}$ et par p le quotient incomplet de la division de A par $(a \pm \alpha)^{n-1}$.

Il résulte de ce qui précède que le nombre v_1, donné par la formule (ω)

$$v_1 = \frac{p + (n - 1)(a \pm \alpha)}{n} \text{ quot. inc. ,}$$

est ou $\sqrt[n]{A}$ ou une valeur approchée par excès de $\sqrt[n]{A}$.

Si l'on n'obtient pas tout de suite $\sqrt[n]{A}$, on opère sur v_1 comme sur $a \pm \alpha$ et ainsi de suite.

II. — $\sqrt[n]{A}$ est un nombre irrationnel.

Si l'on représente par x et $x + 1$ les deux nombres consécutifs entre les $n^{\text{ièmes}}$ puissances desquels se trouve A, la formule (ω) donne x ou une valeur approchée par excès de x.