Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 15 (1913)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES PROBLÈMES CONCERNANT LE JEU DE TRENTE ET QUARANTE

Autor: Mirimanoff, D.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14858

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

soit obtenues en resserrant de plus en plus l'intervalle à examiner. Ainsi, soit à déterminer les valeurs de x supérieures à B et à C; on a, comme on peut le vérifier aisément,

$$\frac{B+1}{2A} > y - Ax > \frac{B}{2A+1}.$$

Or y est de la forme $Ax + D$, D étant $< x$. On a donc de la sorte circonscrit une région dans laquelle doit se trouver D; de là x, en égalant $A^2x^2 + Bx + C$ au carré de $Ax + D$.

On trouvera du reste dans ce recueil de nombreux et intéressants exemples de cette méthode, ainsi que des aperçus de toutes sortes sur la conduite des calculs auxquels conduit le difficile problème qui fait l'objet de la présente étude, laquelle a été entreprise comme une application de la théorie élémentaire des nombres, et comme suite aux articles de l'*Ens. math.* sur le même sujet publiés en 1907 (p. 24, 286 et 417), en 1909 (p. 329 et 430), en 1910 (p. 457) et 1911 (p. 187).

A. Aubry (Dijon).

SUR QUELQUES PROBLÈMES CONCERNANT LE JEU DE TRENTE ET QUARANTE

Les problèmes fondamentaux concernant le jeu de trente et quarante ont été traités pour la première fois, à ma connaissance du moins, par Poisson en 1820, dans un beau mémoire inséré dans le t. 16 des *Annales math. de Gergonne*. Quarante-sept ans plus tard le géomètre allemand Œttinger retrouvait en les complétant en plusieurs points la plupart des résultats donnés par Poisson; mais son travail, inséré dans le t. 67 du *Journal de Crelle* et cité par H. Laurent dans son traité du *Calcul des Probabilités*, semble avoir passé inaperçu.

Bien que les déductions de Poisson et d'Œttinger présentent des lacunes, je n'aurais pas cru utile de revenir sur ce sujet, si Bertrand, en traitant dans son Calcul des Probabilités l'un des problèmes déjà résolus dans les mémoires cités, n'était arrivé à des résultats ne concordant pas entièrement avec ceux d'Œttinger et de Poisson; le désaccord n'est pas grand, il est vrai, mais il existe, et cela suffirait pour justifier une étude nouvelle.

Il était facile de refaire les calculs, dans le cas particulièrement simple envisagé par Bertrand. Je dirai tout de suite qu'un certain

nombre de résultats donnés par Bertrand contiennent des décimales inexactes ; la même remarque s'applique au n° 69 des *Leçons élémentaires sur le Calcul des Probabilités*, de M. R. de Montessus, mais je dois ajouter que ces erreurs, peu importantes du reste, ne sont que des erreurs de calcul.

Pour simplifier le problème, Bertrand a introduit une hypothèse qui modifie les conditions du jeu. Bien plus compliquée est l'étude des problèmes réels ; il n'est pas facile de se rendre compte du degré d'approximation fourni par les procédés de calcul de Poisson et d'Œttinger. Je montrerai comment on pourrait compléter l'analyse d'Œttinger. Quant à celle de Poisson, elle exigerait des développements trop longs pour trouver place dans cette communication.

1. Le jeu de trente et quarante se joue avec six jeux de 52 cartes (et non avec 8, comme le dit par erreur Bertrand). Le banquier abat une, deux, trois... cartes jusqu'à ce que la somme des points ait dépassé trente (les figures valant dix). Cette première rangée est suivie par une seconde. Le joueur parie pour l'une des rangées et gagne si le nombre des points de sa rangée est plus petit que celui de l'autre. Si les deux rangées ont 31 points chacune, le banquier a droit à la moitié des mises. Tel est le seul avantage du banquier. Pour le calculer, il suffit donc d'évaluer la probabilité d'abattre deux rangées de 31 points chacune et d'en prendre la moitié.

D'où le problème fondamental suivant : Quelle est la probabilité d'abattre une rangée de i points ?

Désignons cette probabilité par p_i. Il est utile de réunir les rangées en groupes que j'appellerai familles. Je dirai que deux rangées appartiennent à une même famille, si elles se composent de cartes de même valeur.

Désignons par n_i le nombre des familles de i points. J'ai calculé n_i pour tous les i ne dépassant pas 31. Comme le calcul de n_i revient à la solution d'un problème de la partition des nombres, j'aurais pu me servir des formules de Sylvester et de Cayley ou du calcul des résidus, mais j'ai préféré calculer les n_i de proche en proche. En particulier j'ai trouvé qu'il existe 4231 familles de rangées ayant chacune 31 points.

Pour résoudre le problème fondamental, il suffirait de calculer la somme des n_i probabilités partielles relatives à chacune des n_i familles de i points ; mais ce moyen direct serait évidemment trop long.

Dans le jeu de trente et quarante les cartes ne sont pas remises dans le jeu ; la probabilité p_i dépend donc du nombre et de la valeur des cartes sorties.

Mais considérons le cas hypothétique où les cartes sorties seraient remises dans le jeu et soit P_i la probabilité d'abattre une

rangée de i points dans cette hypothèse. Bertrand s'est borné à ce cas limite déjà envisagé par Poisson et Œttinger, mais, comme je l'ai déjà dit, la plupart des valeurs des P_i calculées par lui contiennent des décimales inexactes. En particulier $P_{31} = 0{,}148061$ (plus exact. 0,14806086) et non 0,148218 ; par conséquent l'avantage du banquier dans cette hypothèse serait $\frac{1}{2}$. 0,0219220 et non $\frac{1}{2}$. 0,0219686. Poisson a trouvé pour valeur approchée de P_{31}, 0,148062 et Œttinger 0,14806092. Je compte publier prochainement le tableau complet des valeurs des P_i.

2. C'est dans l'étude du problème réel que la notion de famille m'a été particulièrement utile. Pour évaluer la probabilité p_i il suffit de calculer le coefficient de t^i dans le développement de

$$(1 + ut)^{x_1}(1 + ut^2)^{x_2} \dots (1 + ut^{10})^{x_{10}} ,$$

$x_1, x_2, \dots x_{10}$ désignant le nombre des as, des deux, etc., au moment où l'on abat la rangée. Ce coefficient est un polynôme de la forme $a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_k u^k$. Posons $s = x_1 + x_2 + \dots + x_{10}$ et soit b_m le coefficient binômial $\binom{s}{m}$; la probabilité d'abattre une rangée de m cartes et de i points est égale à $\frac{a_m}{b_m}$, d'où $p_i = \sum_{m=1}^{k} \frac{a_m}{b_m}$. Mais est-il nécessaire de calculer toutes ces fractions ?

Œttinger néglige celles dont l'indice est supérieur à une certaine limite. J'ai cherché à me rendre compte du degré d'approximation qu'on obtient de cette manière. Quelle est la borne supérieure de l'erreur possible ?

Je ferai remarquer que $\frac{a_m}{b_m}$ est une probabilité totale, somme de probabilités partielles relatives aux différentes familles de m cartes et de i points ; or il est facile de calculer la borne supérieure ε_m de ces probabilités partielles ; en la multipliant par le nombre des familles de m cartes on aura une borne pour $\frac{a_m}{b_m}$, on en déduira l'erreur possible affectant le résultat final. J'ai réussi ainsi à justifier le procédé d'Œttinger, mais je n'ai pas eu le temps de vérifier ses calculs. On rencontre dans les mémoires d'Œttinger et de Poisson d'autres points obscurs qu'il serait utile de mettre en lumière. Je compte le faire prochainement.

31 août 1912. D. Mirimanoff (Genève).