Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 15 (1913)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: APPLICATION D'UNE TRANSFORMATION DE M. BROCARD A LA CONSTRUCTION DE CERTAINES COURBES TRANSCENDANTES

Autor: Turrière, Emile

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14859

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

APPLICATION D'UNE TRANSFORMATION DE M. BROCARD A LA CONSTRUCTION DE CERTAINES COURBES TRANSCENDANTES

Pour peu que l'on s'occupe de la théorie et de l'histoire des courbes particulières, des courbes transcendantes notamment, on ne peut manquer d'être frappé par la multitude des travaux les concernant, et par l'absence de tout lien entre ces divers travaux. C'est qu' « une grande application et l'étude opiniâtre d'une » courbe peuvent y faire voir des propriétés singulières : l'inven- » teur en est redevable à son génie et souvent à la fortune[1] » plutôt qu'à des recherches systématiques. Ayant été amené à constater combien cette théorie des courbes transcendantes particulières a besoin d'idées générales, j'ai fait, sous l'influence de la lecture du magistral ouvrage de M. Gino Loria sur les courbes planes, quelques remarques que je crois utiles de faire connaître : c'est à cet ordre d'idées que se rattache le présent article.

1. — En ce qui concerne les courbes algébriques, les notions de degré, classe, genre... la notion de construction géométrique et celle de transformations rationnelles, ponctuelles ou tangentielles, permettent d'établir des coordinations et des classifications simples. Il n'en est pas de même pour les courbes transcendantes. A la suite des recherches de M. Gino Loria sur les *courbes panalgébriques*, j'ai montré dans un article *Sur la classification et la construction des courbes transcendantes* (*Enseignement mathématique*, 1913), qu'il y a le plus grand intérêt à introduire la notion du nombre ω qui représente l'ordre de l'équation différentielle rationnelle la plus simple satisfaite par la courbe transcendante envisagée. Plus profondément encore, il y a lieu d'étudier les courbes du point de vue de leurs constructions : *Une courbe transcendante particulière* (C) *étant supposée donnée, et même matériellement réalisée, quelles sont les courbes transcendantes qui en dérivent par des constructions élémentaires ?* En se posant et en résolvant une telle question, on constitue des familles nettement distinctes entre elles de courbes transcendantes ; la plus

[1] G. Cramer. *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Genève, 1750, page VI de la préface.

grande connexion existe entre les diverses courbes particulières d'une même famille ; toutes les courbes ont nécessairement le même ordre ω ; l'une d'elles, quelconque d'ailleurs, étant supposée matériellement réalisée, la construction de toute autre en résulte ; réciproquement, pour que l'une de ces courbes puisse être construite élémentairement, il est absolument nécessaire de se donner matériellement l'une d'elles.

2. — Parmi les courbes transcendantes, les spirales et les quadratrices occupent une place particulièrement importante, ce qui résulte principalement de leur grand intérêt historique. Les plus antiques courbes transcendantes planes connues sont, en effet, la quadratrice de Dinostrate et la spirale d'Archimède.

Supposons matériellement réalisée la *spirale d'Archimède*. L'inversion permet de lui rattacher la *spirale hyperbolique ;* des transformations rationnelles simples, opérant sur le seul rayon recteur, permettent de faire dériver les *spirales de Fermat* et autres *spirales d'ordre supérieur* de la spirale d'Archimède. La *développante de cercle* et la *spirale tractrice compliquée de Côtes* appartiennent elles aussi à cette même famille, puisque la première de ces courbes est l'antipodaire de la spirale d'Archimède (Clairault) ou la polaire réciproque par rapport à un cercle de la spirale hyperbolique (Monge), tandis que la seconde est l'inverse de la développante du cercle ou l'antipodaire de la spirale hyperbolique(Côtes et Neuberg ; G. Loria, *Spezielle Kurven* II, p. 202). Je vais maintenant, et c'est le principal objet du présent article, établir qu'à cette même famille de courbes panalgébriques se rattachent la *quadratrice de Dinostrate* et la *cochléoïde* de Falkenburg.

On sait que M. Brocard [1] a imaginé une transformation géométrique simple pour faire dériver le trifolium oblique du cercle ; cette construction géométrique se définit ainsi : étant donné un point M, quelconque sur la courbe primitive (C), on lui fait correspondre l'un des deux points P_1, P_2 d'intersection de la parallèle à l'axe Ox menée par M et de la circonférence de centre M qui passe par l'origine O ; en d'autres termes, on prend sur la parallèle à Ox menée par M deux points P_1 P_2 tels que :

$$MP_1 = MP_2 = OM .$$

Cette transformation aurait pu d'ailleurs être découverte en cherchant à déduire d'une parabole de foyer O sa directrice : si la courbe à transformer (C) est, en effet, une parabole de foyer O et d'axe Ox, l'une des courbes transformées (C_1) est la directrice

[1] H. Brocard : *Le trifolium*. Journal de mathématiques spéciales, 1891.
G. Loria : *Spezielle Kurven*, I. p. 168.
H. Bouasse et E. Turrière : *Exercices et compléments de mathématiques générales*. Paris, Delagrave, éditeur, 1912, §§ 404-406.

tandis que la seconde (C_2) est une seconde parabole. A une droite (C) correspond une hyperbole équilatère ; à une ellipse de foyer O correspondent deux ellipses.....

Cette définition étant rappelée, supposons que la courbe primitive (C) soit une spirale hyperbolique ; il lui correspond deux courbes (C_1) et (C_2) qui sont deux *cochléoïdes généralisées :* je désigne sous cette dénomination (*G. Teixeira*, Traité des courbes spéciales, II, p. 386) les courbes d'équation polaire :

$$r = a \frac{\sin(\theta - \theta_0)}{\theta - \theta_1} ;$$

en particulier, pour un choix convenable de l'axe Ox, on peut ainsi construire la *cochléoïde* de Falkenburg d'équation polaire :

$$r = \frac{\sin \theta}{\theta} ,$$

et la *syncochléoïde* [Hofbauer, Intermédiaire des mathématiciens, 1905, p. 158], courbe dont l'équation polaire est :

$$r = \frac{\cos \theta}{\theta} .$$

Par inversion opérant sur ces cochléoïdes, on construit la *quadratrice de Dinostrate* et les courbes plus générales étudiées par Chasles.

3. — La même transformation de M. Brocard appliquée à la *spirale logarithmique,* rattache à cette spirale une courbe d'équation polaire

$$r = a \,.\, \cos \theta \,.\, e^{m\theta} ,$$

qui jouit de la propriété importante d'être la podaire de la *logarithmoïde* de M. E. Köstlin. Cette courbe curieuse, découverte en 1907 par cet auteur, à propos de ses intéressantes recherches sur les *Arcuides* (Gino Loria, Spezielle Kurven II, p. 240), a été considérée de nouveau par M. Köstlin lui-même [1] comme étant l'enveloppe d'un rayon vecteur invariablement lié à une spirale logarithmique qui roule sans glissement sur une droite. L'intérêt que présentent d'une part les Arcuides et d'autre part l'importance cinématique du roulement de la spirale logarithmique sur une droite (description d'une ligne droite par roulement sur une base rectiligne) placent la logarithmoïde parmi les courbes transcendantes remarquables. Elle se rattache donc, du point de vue de sa

[1] Ueber eine transzendente Kurve von der die Zycloïde ein Grenzfall ist (*Mathematische-Naturwissenchaften Mitteilungen, Würtemberg*, [2]. XI, 1909 (pp. 55-64 et 66-78).

construction géométrique, à la spirale logarithmique (de même que la *spirale de Poinsot* et autres courbes remarquables), puisqu'elle est la podaire négative d'une transformée de la spirale logarithmique.

4. — Dans un article sur les *courbes transcendantes et interscendantes* (*Enseignement mathématique,* mai 1912, pp. 209-214), j'ai montré que, dans bien des cas, il est possible de considérer une courbe transcendante particulière comme étant la limite d'une famille dépendant d'un paramètre de courbes algébriques ou interscendantes : la spirale logarithmique est, par exemple, une limite de spirales sinusoïdes. J'ai même spécifié que la spirale hyperbolique est la limite d'une famille d'épis interscendants[1] :

$$r = \frac{m}{\sin m\theta} .$$

En appliquant à un *épi* de M. Aubry, d'équation polaire

$$r = \frac{a}{\sin m\theta} ,$$

la transformation de M. Brocard, on est conduit à une courbe algébrique, ou interscendante suivant les valeurs de m, d'équation polaire

$$r = \frac{2a \cos \theta}{\sin 2m\theta} ;$$

en appliquant, en second lieu, à cette courbe la *transformation en éventail* de M. Haton de la Goupillière[2], transformation qui consiste à conserver le rayon vecteur et à multiplier les azimuts par un facteur constant, on rattache donc, par une double transformation géométrique, une certaine famille de courbes d'équation polaire

$$r = a . \frac{\sin n\theta}{\sin p\theta}$$

aux épis de M. Aubry. C'est là une famille de courbes, généralisant les rosaces et les épis, appelées *courbes d'intersection de deux mouvements de rotation,* algébriques, panalgébriques ou d'ordre

---

[1] A ce sujet, je signale que l'abbé Aoust, dans son *Analyse infinitésimale des courbes planes* (Paris 1873), p. 143, cite une courbe particulière

$$r \times \sin \frac{\theta}{\sqrt{3}} = \text{const} ,$$

à laquelle il est conduit dans la résolution d'un certain problème ; c'est là un épi particulier et cet épi est interscendant.

[2] Note sur le procédé le plus général de transformation des engrenages de roulement cylindriques ou coniques, *Annales des Mines,* [6], v. p. 333.

$\omega = 2$ suivant les cas. Ainsi que je l'avais déjà indiqué dans mon article antérieurement cité (p. 213), elles permettent de définir comme courbes limites la cochléoïde et la quadratrice de Dinostrate [1].

D'une manière analogue, puisque la logarithmoïde de M. E. Köstlin peut être rattachée par une transformation géométrique à la spirale logarithmique, il est donc possible de former une famille de courbes algébriques ou interscendantes admettant la logarithmoïde pour courbe limite : il suffit d'appliquer à la famille de spirales sinusoïdes, considérée pour définir la spirale logarithmique, la transformation géométrique qui fait dériver de cette dernière courbe celle de M. Köstlin.

J'aurai prochainement l'occasion de rattacher la construction de la cycloïde ordinaire à celle de la spirale d'Archimède. La transformation de M. Brocard appliquée en effet à la spirale d'Archimède définit une nouvelle courbe transcendante dont la cycloïde est une courbe antipodaire.

Emile Turrière (Poitiers).

---

[1] La bibliographie de ces courbes ne se trouvant pas indiquée dans les ouvrages sur les courbes spéciales, je note ci-dessous les principaux mémoires où elles sont citées ou étudiées.

Roget (Philos. Transactions, 1825, p. 131). — Le François (Correspondance mathématique et physique de Quételet, 1829, t. V. p. 120 et p. 379. — G. V. D. Mensbrugge (Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers de l'Académie royale de Belgique, t. XVI, 1863). - Ch. Laboulaye : Traité de Cinématique, 1878, p. 418 et p. 947. — J. Plateau (Correspondance mathématique et physique de Quételet : 1828, t. IV, p. 393 et 1829, t. VI. p. 121. — Annales de chimie et de physique de Paris, 1831, t. XLVIII, p. 281. — Bulletin de l'Académie royale de Belgique : 1836, t. III, p. 7 et 1849, t. XVI, p. 1). — D. Gautier (Mesure des angles. Hyperboles étoilées et développantes, Paris, 1911). Les *Hyperboles étoilées* de cet auteur sont précisément identiques aux courbes précédentes et son *hyperbole développante* n'est autre que la courbe trascendante qui est la limite d'une famille d'hyperboles étoilées : la quadratrice de Dinostrate. J'ai déjà signalé ce fait (*Enseignement mathématique* 1912, p. 213).