Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 15 (1913)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES ROULETTES A BASE RECTILIGNE
Autor: Turrière, É.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14867

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LES ROULETTES A BASE RECTILIGNE

R. de Saussure (*American Journal of mathematics*, XVII, 1895, p. 269-272) a donné des solutions bien simples du problème des roulettes dans le roulement d'une courbe plane sur une base rectiligne et du problème inverse, c'est-à-dire de la détermination du profil générateur correspondant à une roulette assignée *a priori*. Je vais indiquer, dans le présent article, une méthode de résolution de ces problèmes qui, dans bien des cas, présente certains avantages.

1. — Un cas particulièrement intéressant de déplacement d'une figure plane dans son plan est certainement celui pour lequel une courbe (C) du plan mobile, invariablement liée à ce plan mobile, est assujettie à passer par un point fixe O et à toucher en ce point une droite fixe Ox : *la construction ordinaire du centre instantané de rotation est alors illusoire*. L'abbé Aoust (Analyse infinitésimale des courbes planes, 1873, p. 250-251) a le premier remarqué que le centre instantané de rotation est, pour chaque position de la courbe (C), le centre de courbure de cette courbe (C) correspondant à celle des normales de cette courbe qui coïncide momentanément avec la droite Oy ; de sorte que, ainsi que l'observe ce géomètre, le mouvement est produit par le roulement sur la base rectiligne Oy de la développée de la courbe (C). Cette même remarque fut faite, en 1901, par E. Duporcq, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (à propos de la Question 1861, p. 43). Ignorant ces remarques de l'abbé Aoust et d'E. Duporcq, j'avais, en 1909, signalé cette même propriété (*Nouvelles Annales*, juillet 1909, *Sur les surfaces de Monge*).

Supposons que dans le plan fixe xOy se déplace une courbe (C) invariable en grandeur ; cette courbe est supposée rapportée à des axes $\omega\xi\eta$, mobiles mais invariablement liés à (C). Le déplacement du plan $\omega\xi\eta$ par rapport au plan fixe Oxy est défini par les conditions suivantes : la courbe (C) doit constamment passer par O et y toucher la droite fixe Ox. Soit :

$$\xi \cos\varphi + \eta \sin\varphi = \varpi ,$$

ϖ étant une fonction donnée de l'azimut φ, l'équation de la tan-

gente à la courbe (C) en un point quelconque, par rapport aux axes mobiles $\omega\xi\eta$; cette fonction ϖ étant la distance de ω à la tangente et sa dérivée $\frac{d\varpi}{d\varphi}$ représentant la distance du même point ω à la normale correspondante de (C), on peut donc poser les relations suivantes entre ϖ, sa dérivée, et les coordonnées par rapport aux axes fixes Oxy du point ω :

$$(1) \qquad y = \varpi \ , \qquad x = \frac{d\varpi}{d\varphi} \ ;$$

l'équation de la normale à la roulette du point ω est

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy = 0 \ ;$$

il résulte donc des formules (1) que cette normale rencontre l'axe Oy au point d'ordonnée

$$y = \varpi + \frac{d^2\varpi}{d^2\varphi} \ ,$$

(à moins que $\frac{d\varpi}{d\varphi}$ ne soit nul, c'est-à-dire que ω ne soit sur Oy : la normale à la trajectoire de ω est alors Oy). En interprétant la relation précédente, on est conduit, par conséquent, à considérer le centre de courbure de (C) correspondant à la normale Oy comme étant le centre instantané de rotation.

2. — Les formules (1) permettent de déterminer le lieu du point ω dans le plan fixe, lorsque la courbe (C) est donnée et inversement d'effectuer la recherche des courbes (C) telles que le point ω ait une trajectoire (Γ) assignée *a priori*. Si (C) est donnée, l'élimination de φ entre les équations (1)conduira à une relation entre x et y qui sera l'équation cartésienne de (Γ). Inversement si (Γ est donnée, soit

$$x = f(y)$$

l'équation de cette courbe imposée ; l'équation de (C) sera

$$\varphi = \int \frac{d\varpi}{f(\varpi)} + \text{const} \ ;$$

la courbe (C) dépend donc alors d'une constante arbitraire, qui n'a aucune influence sur la forme de cette courbe : deux courbes différant par les valeurs de cette constante arbitraire se déduisent, en effet, l'une de l'autre par une rotation autour du pôle ω. Il était d'ailleurs évident *a priori* que les courbes (C) correspondant à une roulette imposée (Γ) devaient dépendre d'une équation différentielle du premier ordre, admettant la rotation autour de ω pour transformation infinitésimale.

J'emprunterai à M. H. Brocard[1] des exemples de détermination de la courbe (Γ) lorsque (C) est connue. Lorsque (C) est une ellipse de foyer ω (*Nouvelles Annales*, 1872, Question 959, p. 132), soit

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

l'équation de cette conique ; sa podaire par rapport à ω est le cercle principal ; l'équation polaire tangentielle de la conique est donc

$$\varpi^2 - 2c\varpi \cos \varphi = b^2 \ ;$$

d'où, en dérivant cette équation par rapport à φ et en appliquant ensuite les relations (1), il résulte que la trajectoire de ω a pour équations cartésienne et polaire :

$$(x^2 + y^2)(y^2 + b^2)^2 = 4a^2y^4 \ , \qquad r(2a - r) \sin^2 \theta = b^2 \ .$$

Lorsque (C) est une ellipse de centre ω, la même méthode conduit à la quartique circulaire

$$x^2y^2 + (y^2 - a^2)(y^2 - b^2) = 0$$

comme lieu de ω. Considérant encore le cas d'une parabole (C) de foyer ω, la trajectoire (Γ) de ω est la quartique d'équations cartésienne et polaire :

$$a^2(x^2 + y^2) = y^4 \ , \qquad r . \sin^2 \theta = a \ .$$

(*Nouvelles Annales*, 1872, Question 973, p. 500). Ces deux dernières roulettes ont été étudiées par W.-H. Besant (*ibid.*, e871, p. 327 et 554).

3. — Le problème inverse du précédent conduit à des considérations beaucoup plus intéressantes.

Supposons, par exemple, que la courbe imposée (Γ) est une droite ; soit

$$x \cos a + y \sin a = b$$

son équation ; l'une des courbes (C) est donc

$$\varpi = \frac{b}{\cos a} - \operatorname{tang} a \, . \, e^{-\varphi \operatorname{cotg} a} \ ;$$

pour $b = o$, c'est-à-dire lorsque la droite imposée (Γ) passe par O, cette équation représente une spirale logarithmique. Lorsque b est différent de zéro, elle représente une courbe parallèle à la spirale logarithmique : ces courbes parallèles à la spirale loga-

[1] Voir aussi : Question 457 de *Mathésis* 1890 p. 205 [(C) est une parabole de foyer ou de sommet ω] et l'article *Roulettes de coniques* de M. H. Brocard dans la *Nouvelle Correspondance Mathématique* de 1876 (p. 373).

rithmique viennent d'être l'objet d'une Question intéressante de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (n° 3951, 1911, p. 266, — 1912, p. 153-156) : « Pour qu'un système de courbes parallèles ne com-
« prenne que des courbes semblables, il faut que leur développée
« soit une spirale logarithmique. Toutes les courbes parallèles à
« une spirale logarithmique et situées d'un même côté de cette
« spirale sont semblables entre elles, sans être pourtant sembla-
« bles à la spirale logarithmique. Le cercle seul est semblable à
« ses parallèles. La développante de cercle est la seule courbe
« égale à ses parallèles ».

Comme second exemple simple, je citerai celui de la parabole (Γ) d'équation

$$x = 1 + y^2 ;$$

la courbe (C) correspondante, est définie par l'équation

$$\varphi = \int \frac{d\varpi}{1 + \varpi^2} = \text{arc tang } \varpi ,$$

ou

$$\varpi = \text{tang } \varphi ;$$

cette courbe (C) est donc l'antipodaire d'une courbe *Cappa*.

4. — Dans les *Nouvelles Annales* de 1909, j'avais rapidement signalé la solution du problème inverse dans le cas particulier où la courbe imposée (Γ) est une circonférence. Ce problème se présente dans l'étude de la forme rationnelle qu'il convient de donner aux tiges qui dirigent les vannes des écluses de certains canaux. Dans le cas particulier où le cercle imposé (Γ) est tangent à la droite oy, j'avais annoncé que la courbe (C) est l'inverse d'une développante de cercle ou une courbe parallèle à cette inverse ; ce résultat s'établit immédiatement sans aucun calcul ; une figure montre, en effet, que la courbe (C) correspondant à un cercle (Γ) tangent en O à l'axe Oy doit avoir sa tangente polaire constante : cette courbe est donc, d'après Côtes, la tractrice compliquée de M. Loria (Spezielle Kurven, II, p. 200), courbe qui est encore désignée par les dénominations de tractrice polaire (Giard, Neuberg), de spirale tractrice (G. Teixeira), de tractrice circulaire (H. Brocard). Dans le cas où le cercle (Γ) touche Oy en un point autre que O, la courbe (Γ) est une parallèle de la précédente.

Dans le cas général d'un cercle (Γ) quelconque, d'équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 , \qquad (a > 0)$$

la courbe (C) a pour équation

$$\varphi = \int \frac{d\varpi}{a + \sqrt{R^2 - (\varpi - b)^2}} ; \tag{2}$$

l'intégration s'effectue élémentairement, mais trois cas sont à distinguer : lorsque R est supérieur à a, on doit introduire la fonction logarithmique ; lorsque $R = a$ (cas de la tractrice compliquée et de ses parallèles) et lorsque R est inférieur à a, l'intégrale dépend des fonctions circulaires. Il est aisé de démontrer que ces diverses courbes ne sont autres que les tractrices du cercle ($b = o$) ou des parallèles à ces tractrices ($b \neq o$), soit par un raisonnement géométrique, soit par un calcul simple.

Vérifions cette propriété analytiquement, ce qui nous permettra d'établir l'équation des tractrices du cercle par une méthode bien plus simple que celles de Morley et de Bordoni. Considérons, en effet, un cercle de centre O, d'équation

$$x^2 + y^2 = R^2 ;$$

soit (C) une tractrice de ce cercle ; la tangente à cette tractrice (C) en un quelconque de ses points M coupe le cercle en deux points : soit N l'un d'eux ; la condition imposée est $MN = \text{const} = l$. Projetons en P le centre O du cercle sur la droite MN ; on a

$$OP = \varpi , \qquad PM = \frac{d\varpi}{d\varphi} ,$$

puisque ces longueurs ne sont autres que les distances de O à la tangente et à la normale en M de la courbe (C) ; le triangle rectangle PON donne alors la condition

$$R^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PN}^2$$

qui se traduit par l'équation différentielle des tractrices cherchées

$$R^2 = \varpi^2 + \left(\frac{d\varpi}{d\varphi} - l\right)^2 ;$$

celle-ci se met finalement sous la forme :

$$d\varphi = \frac{d\varpi}{l \pm \sqrt{R^2 - \varpi^2}} ; \tag{3}$$

qui s'identifie immédiatement avec l'équation (2).

Puisque j'ai antérieurement fait allusion à l'équation de Morley et de Bordoni, il convient d'indiquer comment il est possible de la retrouver en partant de l'équation tangentielle (3). Il suffit de remarquer que l'on a :

$$r^2 = \varpi^2 + \left(\frac{d\varpi}{d\varphi}\right)^2 , \qquad \frac{1}{\varpi^2} = \frac{1}{r^2} + \left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 ;$$

ces deux relations permettent d'obtenir des expressions de ϖ^2 et de $\left(\frac{d\varpi}{d\varphi}\right)^2$ en fonction de r^2 et $\frac{dr}{d\theta}$; en substituant dans l'équation différentielle (3) de la tractrice on obtient l'équation de MORLEY-BORDONI [1].

5. — Supposons qu'on veuille réaliser un roulement sur une base rectiligne pour lequel une roulette soit assignée à l'avance. A ce problème, on pourra substituer celui du mouvement défini par une courbe (C) de grandeur invariable passant par un point fixe et y touchant une droite fixe. Il suffira de choisir arbitrairement un point O sur la base donnée et de considérer celle-ci comme étant l'axe des ordonnées Oy d'un système d'axes rectangulaires (Ox, Oy).

Le cas du tracé d'une droite avec une base rectiligne est particulièrement intéressant, car il se retrouve chaque fois que la base quelconque rencontre la roulette assignée, elle-même quelconque : la roulette peut, en effet, être toujours assimilée à une spirale logarithmique (voir mon article antérieur *Sur les spirales logarithmiques osculatrices à une courbe plane*) au voisinage du point d'intersection, puisque les petits arcs de la base et de la roulette imposée voisins du point d'intersection peuvent être remplacés par des éléments des tangentes aux deux courbes en ce point (*Exercices et compléments de mathématiques générales*, § 263). C'est un résultat bien connu que la courbe génératrice doit être la spirale logarithmique : il résulte, en effet, du théorème sur le centre instantané de rotation et la construction générale des tangentes aux roulettes, que le rayon vecteur émanant du point générateur de la roulette rectiligne et aboutissant à un point de la courbe roulante doit faire un angle constant avec la tangente à cette courbe.

Ce même théorème se rattache au 3° du présent article ; la méthode indiquée est certainement plus compliquée dans ce cas que la méthode directe. Mais considérons le *tracé d'un cercle avec une base rectiligne* (*Exercices et compléments de mathématiques générales*, § 264). Substituons à ce problème le problème équivalent du 4° : *la courbe roulante sur* Oy *doit être la développée d'une tractrice de cercle :* cette courbe est donc parfaitement définie par une propriété géométrique remarquable ; en second lieu, puisque la tractrice du cercle a été obtenue tangentiellement, cette développée a une équation qu'on peut écrire *sans aucun nouveau*

[1] Les tractrices du cercle font l'objet du paragraphe 282 des *Exercices et compléments de mathématiques générales* (pp. 218-220) de MM. H. BOUASSE et E. TURRIÈRE (Paris, Delagrave, 1912). La tractrice circulaire est considérée comme trace de la *roulette coupante* et la figure 200, qui la représente dans un cas particulier, a été tracée par un procédé mécanique. Une application aux voitures y est indiquée.

calcul : il suffit de remplacer $\frac{d\varpi}{d\varphi}$, dans l'équation différentielle (3), par ϖ, et φ par $\varphi + \frac{\pi}{2}$.

Cette développée de la tractrice du cercle est d'après Morley la courbe que Ch. Laboulaye appelle *courbe à* n *saillies,* dans le cas de la représentation au moyen des fonctions circulaires ; dans le cas de la représentation au moyen des fonctions hyperboliques, la courbe peut être aisément construite à partir de la *spirale de Poinsot :* elle se rattache donc, dans ce cas, à la spirale logarithmique. Entre ces deux cas, se place celui où la courbe roulante est

$$r = \frac{2a}{1 - \theta^2},$$

c'est-à-dire est une transformée cissoïdale de deux spirales hyperboliques. (Voir G. Kœnigs, Leçons de Cinématique, Paris, 1897, p. 170 ; G. Loria, Spezielle Kurven, II, p. 158 et 128).

É. Turrière (Poitiers).

SUR LES AXES PRINCIPAUX D'INERTIE

Lorsqu'on étudie le complexe formé par les axes principaux d'inertie d'un système, on choisit généralement comme axes coordonnés les axes de symétrie de l'ellipsoïde central d'inertie. C'est à l'aide de ce système de référence que l'on rétablit ordinairement le remarquable théorème de Binet montrant, entre autre, que le complexe des axes principaux est identique au complexe des normales aux quadriques homofocales à l'ellipsoïde central de gyration. Dans beaucoup d'ouvrages d'enseignement on emploie aussi, pour chercher la condition à laquelle doit satisfaire une droite pour être axe principal, un système de référence dont l'axe des z coïncide avec la droite choisie. On se borne alors à établir une condition analytique. Il est pourtant facile d'interpréter géométriquement la relation à laquelle on arrive. On obtient ainsi des théorèmes qui, sans avoir l'importance du théorème de Binet, sont cependant intéressants.

Pour qu'une droite quelconque, choisie comme axe Oz, soit avec axe principal d'inertie il faut et il suffit que l'on puisse trou-