Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 15 (1913)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES AXES PRINCIPAUX D'INERTIE
Autor: Bouny, F.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14868

calcul : il suffit de remplacer $\frac{d\varpi}{d\varphi}$, dans l'équation différentielle (3), par ϖ, et φ par $\varphi + \frac{\pi}{2}$.

Cette développée de la tractrice du cercle est d'après MORLEY la courbe que Ch. LABOULAYE appelle *courbe à* n *saillies,* dans le cas de la représentation au moyen des fonctions circulaires ; dans le cas de la représentation au moyen des fonctions hyperboliques, la courbe peut être aisément construite à partir de la *spirale de Poinsot :* elle se rattache donc, dans ce cas, à la spirale logarithmique. Entre ces deux cas, se place celui où la courbe roulante est

$$r = \frac{2a}{1 - \theta^2},$$

c'est-à-dire est une transformée cissoïdale de deux spirales hyperboliques. (Voir G. KŒNIGS, Leçons de Cinématique, Paris, 1897, p. 170 ; G. LORIA, Spezielle Kurven, II, p. 158 et 128).

É. TURRIÈRE (Poitiers).

SUR LES AXES PRINCIPAUX D'INERTIE

Lorsqu'on étudie le complexe formé par les axes principaux d'inertie d'un système, on choisit généralement comme axes coordonnés les axes de symétrie de l'ellipsoïde central d'inertie. C'est à l'aide de ce système de référence que l'on rétablit ordinairement le remarquable théorème de Binet montrant, entre autre, que le complexe des axes principaux est identique au complexe des normales aux quadriques homofocales à l'ellipsoïde central de gyration. Dans beaucoup d'ouvrages d'enseignement on emploie aussi, pour chercher la condition à laquelle doit satisfaire une droite pour être axe principal, un système de référence dont l'axe des z coïncide avec la droite choisie. On se borne alors à établir une condition analytique. Il est pourtant facile d'interpréter géométriquement la relation à laquelle on arrive. On obtient ainsi des théorèmes qui, sans avoir l'importance du théorème de Binet, sont cependant intéressants.

Pour qu'une droite quelconque, choisie comme axe Oz, soit avec axe principal d'inertie il faut et il suffit que l'on puisse trouver sur cette droite un point $O_1(0, 0, h)$ tel que les deux premiers produits d'inertie relatifs à des axes parallèles aux axes coordonnés et passant par ce point soient nuls, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\Sigma my(z - h) = 0 , \qquad \Sigma mx(z - h) = 0 ,$$

ou, en appelant M la masse totale du système, x_g, y_g, z_g les coordonnées du centre de gravité, D et E les deux premiers produits d'inertie relatifs aux axes primitifs Ox, Oy, Oz :

$$D - hMy_g = 0 , \qquad E - hMx_g = 0 .$$

D'où la condition classique :

$$Dx_g - Ey_g = 0 . \tag{1}$$

Pour interpréter cette équation considérons l'ellipsoïde d'inertie ayant pour centre l'origine O des axes coordonnés :

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EXZ - 2FXY = 1 .$$

L'équation du plan diamétral conjugué, dans cet ellipsoïde, à l'axe Oz a des coefficients respectivement proportionnels à :

$$-E \qquad -D \qquad C .$$

D'autre part les coefficients de l'équation du plan déterminé par l'axe considéré et le centre de gravité du système sont proportionnels à :

$$y_g \qquad -x_g \qquad 0 .$$

La condition (1) exprime la perpendicularité de ces deux plans. Donc, l'origine ayant été laissée arbitraire sur l'axe :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un axe soit principal est que le plan diamétral conjugué à la direction de l'axe dans l'ellipsoïde d'inertie relatif à un point quelconque de cet axe soit normal au plan déterminé par l'axe et le centre de gravité.

De là résulte que si un axe est principal tous les plans diamétraux conjugués à sa direction, dans les ellipsoïdes d'inertie ayant pour centre les différents points de l'axe, sont perpendiculaires à un même plan : le plan déterminé par l'axe et le centre de gravité.

L'axe des z étant toujours la droite considérée, supposée axe principal, prenons comme axe des x la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur Oz. Alors :

$$y_g = 0$$

et la condition (1) se réduit à :

$$D = 0 . \qquad (1')$$

La cote h du point pour lequel l'axe Oz est principal est donnée par :

$$E - hMx_g = 0 \qquad (2)$$

Soient $O_1(0, 0, \alpha)$ un point quelconque de Oz et A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, les coefficients de l'équation de l'ellipsoïde d'inertie de centre O_1 rapporté à des axes menés par O_1, parallèlement aux axes Ox, Oy, Oz. Les coefficients de l'équation du plan diamétral conjugué à la direction de l'axe dans l'ellipsoïde d'inertie relatif à O_1 sont proportionnels à :

$$-E_1 \qquad -D_1 \qquad C_1$$

or

$$E_1 = \Sigma mx(z - \alpha) = E - \alpha Mx_g$$

$$D_1 = \Sigma my(z - \alpha) = 0 , \qquad C_1 = \Sigma m(x^2 + y^2) = C .$$

Le plan diamétral considéré a comme équation par rapport aux axes Ox, Oy, Oz :

$$-(E - \alpha Mx_g)X + C(Z - \alpha) = 0$$

ou :

$$-EX + CZ + \alpha(Mx_gX - C) = 0$$

Il décrit donc, lorsque α varie, un faisceau dont l'axe a pour équations :

$$Mx_gX = C , \qquad EX = CZ ,$$

ou :

$$X = \frac{C}{Mx_g} , \qquad Z = \frac{E}{Mx_g} = h .$$

Cette droite est située dans le plan perpendiculaire à l'axe au point pour lequel celui-ci est principal. Il suffit de se rapporter à l'étude des percussions pour remarquer que c'est la ligne suivant laquelle il faudrait faire agir une percussion appliquée au système pour que, celui-ci pouvant tourner autour de Oz, les appuis de l'axe ne supportent aucune percussion. Nous pouvons donc énoncer le théorème :

Si une droite est axe principal d'inertie, les plans diamétraux conjugués à la droite dans les différents ellipsoïdes d'inertie ayant pour centres les points de cette droite forment un faisceau de plans. L'axe de ce faisceau est la ligne suivant laquelle il faudrait faire agir une percussion appliquée au système pour que l'axe principal supposé immobilisé ne supporte aucune percussion.

F. BOUNY (Mons).