Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 15 (1913)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES COURBES DE RIBAUCOUR
Autor: Turrière, É.
Kapitel: I. — Relation entre la chainette de Coriolis et les courbes de Ribaucour.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14873

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

courbe (C), le point P décrit une courbe qui, par définition, est la développée intermédiaire de (C), associée au nombre λ.

A toute courbe (C) est ainsi associée une infinité, dépendant du paramètre λ, de développées intermédiaires. Parmi celles-ci, se trouvent la courbe elle-même ($\lambda = \infty$) et la développée proprement dite ($\lambda = 1$].

Des exemples remarquables de développées intermédiaires ont été donnés par M. Braude dans le mémoire précédemment cité et dans divers travaux qui lui font suite : *Ueber einige Verallgemeinerungen des Begriffes der Evolutoïde* (*Archiv der Mathematik und Physik*, III Reihe, XX, p. 44-52). — *Les développées imparfaites des spirales sinusoïdes, des courbes de Ribaucour, et des coniques* (*Giornale di Matematiche di Battaglini*, 1912, p. 310).

Le problème inverse paraît devoir être particulièrement intéressant. Il s'agit, étant donnée une courbe plane (Γ), de rechercher les courbes (C) dont (Γ) puisse être une développée intermédiaire. Le cas le plus simple est celui pour lequel (Γ) est une droite ; les courbes correspondantes (C) sont celles que Jean Bernoulli avait considérées dès 1716 et que l'on désigne d'habitude sous le nom de *courbes de Ribaucour*, en l'honneur du géomètre français qui les a utilisées, en 1880, dans son *Etude sur les élassoïdes*.

Je ne ferai point ici l'historique de ces courbes remarquables : elles sont étudiées dans les ouvrages (indispensables dans des études de cette nature) de M. Gomes Teixeira (*Traité des courbes spéciales remarquables*, t. II, pp. 282-286) et de M. Gino Loria *Spezielle ebene Kurven*, t. II, pp. 137 et 234). L'article *Courbes transcendantes particulières* de l'édition française de l'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* en contiendra d'ailleurs la bibliographie complète.

Je me propose uniquement de développer ici des considérations qui se rattachent à quelques-uns des résultats obtenus par M. Braude.

I. — Relation entre la chainette de Coriolis et les courbes de Ribaucour.

Dans un article intitulé *Courbes transcendantes et interscendantes* (*Enseignement mathématique*, mai 1912, pp. 209-214), j'ai insisté assez longuement sur le fait que, par un passage à la limite, certaines courbes transcendantes particulières peuvent être envisagées comme appartenant à une famille de courbes algébriques ou interscendantes qui dépendent d'un paramètre arbitraire : la spirale logarithmique, par exemple, est, d'après M. Haton de la Goupillière, la limite d'une certaine famille de spirales sinusoïdes.

Il se produit un fait analogue pour les courbes de Ribaucour. L'équation différentielle de celles-ci étant

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{(cy)^{\frac{2}{m}} - 1}},$$

pour m rationnel, ces courbes de Ribaucour sont certainement des courbes panalgébriques, au sens de M. Gino Loria ; pour des valeurs rationnelles particulières, elles peuvent même être algébriques. Mais lorsque m est un nombre irrationnel, ces courbes de Ribaucour cessent d'être panalgébriques : l'ordre minimum de l'équation différentielle rationnelle, qui les admet pour intégrales, est alors deux : ce sont donc des courbes qui sont à l'égard des courbes panalgébriques précédentes, ce que les courbes interscendantes sont par rapport aux courbes algébriques. De même que les courbes interscendantes constituent une transition entre les courbes algébriques et les courbes transcendantes proprement dites, de même les courbes actuelles se placent naturellement entre les courbes panalgébriques et les courbes transcendantes du second ordre proprement dites.

Pour la valeur zéro du paramètre m, l'équation différentielle des courbes de Ribaucour se présente sous une forme illusoire. Ossian Bonnet (Journal de Liouville, 1844, p. 223 et p. 235) observe, d'après la définition mécanique des courbes de Ribaucour qu'il prend pour départ, que, pour ce cas singulier, la courbe de Ribaucour doit être remplacée par une chaînette d'égale résistance de Coriolis.

Ce même fait est signalé dans une Note *Ueber die Kurven, unter deren Zwischenevoluten sich Kreise befinden* de M. L. Braude, *insérée dans les Monatshefte für Mathematik und Physik* (t. XXIII, 1912, p. 288). Nous pouvons préciser ce résultat en envisageant la famille suivante de courbes de Ribaucour :

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{(1 + my)^{\frac{2}{m}} - 1}};$$

y_0 est un nombre fixé ; quant à m, c'est le paramètre arbitraire dont nous faisons dépendre la courbe de Ribaucour ; ce paramètre est supposé varier d'une manière continue au voisinage de zéro ; il prendra toute valeur possible, rationnelle ou non : la famille de courbes de Ribaucour comprendra donc des courbes des deux premiers ordres de transcendance.

Dans ces conditions, la famille envisagée de courbes de Ribau-

cour admet une courbe limite lorsque m s'annule ; celle-ci est représentée par l'équation

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{e^{2y} - 1}} = \text{arc cos } e^{-y} - \text{arc cos } e^{-y_0} \ ;$$

par un changement d'origine, on la réduit à la forme suivante :

$$x = \text{arc cos } e^{-y} \ ;$$

d'où il résulte que cette courbe limite est la chaînette d'égale résistance de Coriolis :

$$e^{y} \, . \cos x = 1 \ .$$

Cette courbe est du second ordre de transcendance, de même que la courbe générale de la famille de courbes de Ribaucour dont elle est la limite.

II. — Equations tangentielles des courbes de Ribaucour.

Sauf pour la parabole, la chaînette, et la cycloïde, je n'ai trouvé aucune trace de recherches sur l'équation tangentielle d'une courbe de Ribaucour. L'équation tangentielle de la cycloïde a été formée par W. H. Besant dans ses *Exercices pour la licence* (voir *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1871, p. 286). Quant à la chaînette, son équation tangentielle — que l'on trouvera plus loin — n'a pas été considérée à proprement parler ; mais l'équation analogue de l'alysséide a été fréquemment envisagée.

Il est aisé de former l'équation tangentielle d'une courbe de Ribaucour en partant de son équation ponctuelle. Je vais former cette même équation, d'après la propriété géométrique qui définit une courbe de Ribaucour.

J'utiliserai à cet effet le système de coordonnées polaires tangentielles de Hesse et de Ferrers : la courbe est considérée comme enveloppée par la droite d'équation

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi \ ;$$

en prenant l'axe Ox pour base de la courbe de Ribaucour, la condition géométrique imposée à cette courbe est

$$\text{MC} = m \, . \, \text{MN} \ ;$$