Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1914)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: V. — La question de la rigueur.

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

qui conduit le professeur à appliquer les méthodes usuelles et, en particulier, la méthode d'exhaustion, c'est aussi, et surtout, la beauté de ces méthodes et l'admiration devant l'œuvre grandiose de l'antique esprit de la Grèce. Je crois fermement qu'un jour la situation sera complètement changée : l'enseignement secondaire utilisera, en vue de l'utilité, de l'économie et de la simplicité, le Calcul intégral et notamment la fonction primitive pour déterminer des aires et des volumes, et à l'Université on enseignera aussi les découvertes ingénieuses d'Eudoxe et d'Archimède pour perpétuer le souvenir des œuvres et des méthodes créatrices grecques et pour former la génération future des savants.

V. — La question de la rigueur.

Le Comité central désirait en outre savoir, dans quelle mesure on faisait appel à la rigueur en enseignant le Calcul différentiel et intégral dans les écoles secondaires des différents Etats ; il ne lui faisait pas de doute que c'était là le point le plus délicat. C'est surtout du côté de l'enseignement supérieur qu'on entend se plaindre que l'enseignement secondaire fait plus de mal que de bien s'il n'adopte pas les méthodes rigoureuses d'une exposition scientifique ; par contre, les représentants de l'enseignement secondaire affirment que l'intelligence moyenne des élèves ne permet pas une exposition rigoureuse du Calcul différentiel et intégral. Où est donc la vérité ? L'avènement de l'entière rigueur n'est pas accompli de longue date dans les Mathématiques supérieures. Une étude historique nous montre qu'aux commencements on n'exigeait pas une définition précise des notions, ni des déductions logiques irréprochables. C'était peut-être favorable au progrès. Comme M. *Picard* dit : « dans les époques vraiment créatrices, une vérité incomplète ou approchée peut être plus féconde que la même vérité accompagnée des restrictions nécessaires. Si, par exemple, *Newton* et *Leibniz* avaient pensé que les fonctions continues n'ont pas nécessairement une dérivée, ce qui est le cas général, le Calcul différentiel n'aurait pas pris naissance ; de même les idées inexactes de *Lagrange* sur la possibilité des développements en série de Taylor ont rendu d'immenses services et il est heureux que *Newton* ait eu, au début de ses recherches, pleine confiance dans les lois de *Képler*[1]. » Cet état primitif, précédant la critique scientifique, était peut-être propice aux progrès des Sciences ; les inventeurs n'ont pas vu des barricades se dressant de tous côtés ; ils croyaient que l'infini s'ouvrait devant eux ; ils ont mis une confiance exagérée dans leurs forces et dans la force

[1] PICARD, *La Science moderne*, p. 52.

de leurs méthodes. Mais le maintien de cet état de choses serait-il légitime et désirable, serait-il conforme à la dignité, à la vérité, à la sincérité et surtout à la valeur pédagogique et scientifique de l'enseignement mathématique?

La rigueur du Calcul différentiel et intégral ne commence qu'avec *Cauchy*, qui a reconnu, le premier, l'importance du théorème des accroissements finis. Celui qui connaît la lenteur de l'expansion des idées ne s'étonnera pas qu'à l'époque où *Gauss*, *Cauchy* et même *Weierstrass*, *Dirichlet* et *Riemann* ont agi, la plupart des mathématiciens ont appris, en Allemagne et ailleurs, les éléments de leur science dans des livres comme ceux de Lübsen, d'Autenheimer, etc. ou même dans des cours élémentaires servant d'introduction à des traités de Physique. Cette littérature sans nulle critique scientifique n'a pas nui à ceux qui étaient bien doués pour les Mathématiques, elle leur a été utile peut-être en les stimulant à préciser les notions enveloppées de brouillard métaphysique. Mais à la grande masse du public des écoles elle a été funeste : les esprits ont acquis un semblant de science qui chancelait, au lieu d'apprendre une science limpide et sûre. Cette époque est caractérisée avec justesse par M. *Klein* dans son ouvrage autographié *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, où il retrace en quelques mots brefs et décisifs le développement historique du Calcul différentiel et intégral [1]. Quelques souvenirs de jeunesse qu'on trouve dans l'ouvrage déjà mentionné, Klein-Riecke, etc. (p. 11), sont particulièrement caractéristiques. En 1865, lorsque la critique mathématique était, sinon à son apogée, du moins en pleine floraison, il entendit dire, au sortir du gymnase, par son professeur de Mathématiques : « les Mathématiques supérieures ont un tout autre caractère que les Mathématiques élémentaires ; en Mathématiques élémentaires, tout se démontre, tandis que les Mathématiques supérieures sont comme un système de Philosophie, on les croit ou on ne les croit pas. » Mais n'avait-il pas raison, ce brave professeur lorsqu'on pouvait lire dans l'ouvrage le plus répandu de l'époque que l'infiniment petit est un souffle, l'ombre d'une grandeur évanouie. Et ce Calcul différentiel et intégral sans rigueur, sans critique a longtemps vécu dans les esprits. Comme des couches géologiques à l'intérieur et sur la surface de la Terre, des couches humaines se sont conservées dans l'enseignement secondaire, couches qui ont gardé les fossiles de la Science des époques sans critique. Ne nous étonnons pas que, dans cet état des choses, le gouvernement prussien ait retiré en 1882 aux écoles réales, et en 1892 aux gymnases réaux, l'autorisation d'enseigner le Calcul différentiel et intégral [2]. Je constate

---

[1] KLEIN, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Teubner, p. 454.
LIETZMANN, *Stoff und Methode*, etc., p. 81.

anxieux que le Calcul différentiel et intégral exact n'est toujours pas universellement connu et adopté. Eh bien, quelque partisans ardents que nous soyons des réformes en vue d'un haut idéal de culture générale, nous ne voulons pas de ce Calcul infinitésimal, superficiel, dépourvu de toute précision et indigne de la Science.

Heureusement, la situation change complètement aujourd'hui. Les professeurs d'aujourd'hui de l'enseignement secondaire connaissent, dans le monde entier, le Calcul infinitésimal rigoureux. Il n'est peut-être personne parmi eux qui n'ait lu l'un ou l'autre des ouvrages sur le Calcul différentiel et intégral de MM. *Jordan, Dini, Genocchi-Peano, de la Vallée-Poussin, Hobson, Kowalewsky* ou, pour citer le plus récent, celui de M. *von Mangoldt*. Je ne peux pas m'imaginer quelque part une formation des professeurs de lycée où, au moins dans les cours les plus élevés, l'esprit de ces ouvrages ne serait pas dominant. Même en Angleterre, où l'on s'attache si fort aux traditions de l'enseignement mathématique, la situation a beaucoup varié. Comme M. le rapporteur nous le signale, à Cambridge, il y a 20 à 25 ans, on ne faisait pas entrer la rigueur parfaite dans l'exposition des Mathématiques supérieures. Mais depuis, l'enseignement a subi une transformation profonde et les générations nouvelles respirent une atmosphère tout autre.

Nos vues sur la Science sont pénétrées d'esprit critique. Les méthodes de l'enseignement mathématique secondaire se sont améliorées. Les démonstrations à souricière de Schopenhauer, l'assemblage sans raison des théorèmes abstraits, les constructions compliquées fondées sur des artifices, la mémorisation démodée des Mathématiques ont disparu ou sont sur le point de disparaître : l'observation personnelle, les considérations d'ordre pratique, le travail simultané d'une classe entière, l'habitude du travail indépendant et l'introduction de la méthode heuristique ont transformé de fond en comble le système de l'enseignement secondaire. Il est à espérer que, si les nouvelles générations de professeurs acquièrent une vue claire et précise des principes fondamentaux du Calcul infinitésimal et de ses applications nombreuses et si elles ont une connaissance suffisante des méthodes, le travail pédagogique conscient de ces professeurs fera prendre au Calcul infinitésimal la place qui lui est due et lui donnera une forme aussi aisément maniable que celle des matières anciennes. Le travail tendant à ce but ne peut pas être considéré comme achevé là surtout, où les matières nouvelles ont trop d'étendue. C'est à nous, propagateurs des idées de réforme qu'incombe le devoir de conquérir le terrain par les armes de méthodes pédagogiques nouvelles.

Le point le plus difficile sera d'unir aux raisonnements intuitifs la rigueur au sujet de laquelle M. *Picard* dit avec raison « que la

vraie rigueur est féconde, se distinguant par là d'une autre purement formelle et ennuyeuse qui répand l'ombre sur les problèmes qu'elle touche. » Joindre l'intuition à la rigueur, un enchaînement de pensées mathématiques à des vues pratiques, faire un choix judicieux de matières et les ranger en bon ordre pour l'éducation : ce sont là des tâches pédagogiques et mathématiques que nous attendons voir accomplies dans l'avenir. A mon avis, notre devoir principal est d'introduire les notions du Calcul différentiel et intégral d'une manière intuitive, au moyen de considérations géométriques et mécaniques et de nous élever graduellement aux abstractions nécessaires. Toutes nos affirmations doivent être vraies, mais nous ne devons pas viser à atteindre la généralité parfaite. L'exposition des théories doit être naturelle ; n'acceptons pour guide que le simple bon sens et rejetons les artifices incompréhensibles. C'est aussi le moyen le plus sûr pour éveiller dans nos élèves le désir de la rigueur. Le professeur formé par l'éducation mathématique moderne, ayant des notions claires de la limite, de la dérivée, des intégrales définies et indéfinies, des séries infinies pourra aisément satisfaire le désir de rigueur s'il se manifeste. Nous n'avons qu'à songer aux paroles de M. *Hadamard* prononcées à propos de l'enseignement de la Géométrie [1] : « C'est par le bon sens que les commençants doivent comprendre les vérités qui relèvent du bon sens — quand ce ne serait que pour éviter cette erreur, si fréquente et si déplorable, de croire que les Mathématiques et le bon sens sont deux choses opposées. La rigueur viendra plus tard, lorsque la nécessité en sera apparue. »

Le Comité central désirait être éclairé à ce sujet lorsqu'il posait des questions relatives à la rigueur ; il voulait savoir, d'une manière précise, quels éléments d'une exposition scientifique exacte ont pu entrer ou ont la chance d'entrer prochainement dans l'enseignement des établissements secondaires. Il semble que le premier rang appartiendra, à cet égard, à l'Italie. M. *Castelnuovo* écrit dans son rapport : « Quelques-uns des professeurs ont introduit ces notions d'une manière rigoureuse, conforme à l'esprit qui domine l'enseignement mathématique de nos écoles moyennes. On pouvait respecter la rigueur d'autant plus que les programmes officiels des Instituts techniques comprennent la théorie des nombres irrationnels et des limites, théories qu'on développe ordinairement avec soin. La notion des irrationnelles (qui entre aussi dans les programmes des lycées) est présentée ordinairement en suivant la méthode de M. *Dedekind* ou en partant de la représentation par les nombres décimaux illimités. »

Nous pouvons nous faire une idée, sinon exacte, du moins approchée du degré de rigueur, en jetant un regard sur la marche

[1] Conférence du Musée pédagogique, 1904, p. 163.

suivie dans l'introduction des nombres irrationnels, et des limites, sur l'établissement des théorèmes relatifs aux limites, sur les éclaircissements donnés au sujet de la dérivabilité et enfin sur la définition et l'emploi des différentielles.

a) *Nombres irrationnels.* Nous avons vu dans les phrases empruntées à M. *Castelnuovo* qu'en Italie on présente une théorie complète et impeccable des nombres irrationnels en ayant recours aux coupures de M. *Dedekind.* Dans d'autres Etats, on introduit les nombres irrationnels incidemment à l'occasion de l'extraction des racines et l'on ne s'attarde pas à construire une théorie générale. Par exception, quelques professeurs insistent, dans les classes supérieures des écoles allemandes, sur le développement sciende la notion de nombre, et dans un tiers environ des écoles autrichiennes on définit le nombre irrationnel par la méthode de M. *Dedekind.*

b) *Limites.* Nous avons demandé, pour mesurer le degré de rigueur, quel rôle on attribue à la notion de limite. Nous pouvons constater que, nulle part, on ne se contente de l'intuition, pas même — d'après les manuels scolaires employés — en France, où pourtant le programme dit expressément : « Le professeur laissera de côté les questions subtiles que soulève une exposition rigoureuse de la théorie des dérivées ; il aura surtout en vue les applications et ne craindra pas faire appel à l'intuition. »

M. le rapporteur anglais résume en une formule concise la marche la plus recommandable à mon avis : « State nothing but the truth, but do not necessarly state the whole truth. » Tandis qu'une définition précise des limites ne fait nulle part défaut, les théorèmes élémentaires relatifs aux limites sont adoptés, presque partout, sans explications. Ainsi on les mentionne à peine dans les écoles allemandes et suisses, pas du tout dans les écoles anglaises, danoises et françaises ; on les enseigne dans un tiers environ des écoles autrichiennes et dans toutes les écoles russes ; on les trouve dans un manuel scolaire hongrois pour le cas où les fonctions envisagées sont de la forme $f(x) = A + (x - a)^{\alpha} \varphi(x)$, la fonction $\varphi(x)$ étant bornée en valeur absolue dans le voisinage du point a, ce cas offrant le plus de facilité. A mon avis, on ne peut qu'approuver l'introduction claire de la notion de limite ; la passer sous silence serait absolument condamnable. Sans une définition précise des limites, seules les dérivées des fonctions rationnelles pourraient se déterminer, et encore cela n'irait pas sans faire souffrir la rigueur. Mais d'autre part, la notion de limite invervient si fréquemment au cours de l'enseignement secondaire et même dans le cycle inférieur (fractions décimales illimitées, aire du cercle, logarithme, série géométrique, etc.) que sa définition générale ne doit rencontrer aucune difficulté. Sa connaissance est indispensable à qui veut acquérir une culture générale mathéma-

tique et philosophique, objet de première importance pour tout l'enseignement secondaire. Je crois même qu'il existe à peine une notion mathématique qui l'égalerait pour l'influence sur le développement et l'expansion des habitudes de raisonnements exacts.

c) *Dérivabilité.* A la question du Comité central : *Signale-t-on l'existence de fonctions non dérivables,* les réponses étaient aisées à prévoir. Dans la plupart des écoles, on ne parle pas de fonctions non dérivables et là, où il en est question, comme par exemple dans quelques écoles allemandes, dans les écoles russes, dans un cinquième environ des écoles autrichiennes, dans un manuel scolaire anglais et dans certaines écoles suisses et hongroises, on se borne à dire qu'en *certains points* il n'y a pas de dérivée, parce que la sécante n'admet pas de position limite ; mais on ne fait même pas allusion à des fonctions continues, n'admettant nulle part de dérivées. Il va sans dire, et je crois exprimer ici une opinion unanime, que « la pathologie des fonctions » — pour employer l'expression de M. *Schœnflies* — n'est pas à sa place dans l'enseignement secondaire.

d) *Différentielles.* La notion de différentielle n'est pas introduite dans les écoles françaises et dans la plupart des écoles suisses, allemandes et hongroises. Parmi les manuels scolaires allemands, celui de MM. *Behrendsen* et *Götting* est le représentant le plus répandu des idées de réforme, et ce manuel ne mentionne pas les différentielles. Notre rapporteur anglais nous informe que, parmi les ouvrages employés, celui de *Lodge* adopte pour base les différentielles pour la raison qu'elles ont une importance capitale dans les applications géométriques et physiques et dans l'intégration considérée comme processus sommatoire et parce qu'elles sont plus facilement compréhensibles que la notion de dérivée, sans compter que les considérations d'ordre historique parlent en leur faveur. — Cependant, les autres manuels anglais se placent à un point de vue différent.

D'après M. le rapporteur russe : « on définit (en Russie) la différentielle d'une fonction, comme produit de la dérivée par l'accroissement arbitraire de la variable indépendante et l'on ne considère jamais le Calcul différentiel, comme Calcul approximatif. » On voit que ces idées s'accordent avec la définition *Cauchy*. C'est ce qu'on peut dire aussi du point de vue adopté, dans son manuel anglais, par M. *Gibson* qui définit la différentielle géométrique, à l'aide de la tangente, comme $f'(x)\,\Delta x$ et aussi des instructions du plan d'études projeté en Serbie, qui définit, d'une manière analogue, la différentielle d'une fonction de plusieurs variables.

Dans les écoles danoises, on parle de différentielles, mais les professeurs n'ont, en général, pas pris parti. Nulle part, le Calcul différentiel n'est considéré comme ayant un caractère d'approximation et il ne semble pas que les différentielles d'ordre supé-

rieur aient trouvé des partisans. Notre rapporteur allemand écrit qu'on juge les différentielles de façons diverses. L'impression qui se dégage de la littérature est que les différentielles ont vécu. Pourtant, des mathématiciens s'occupant de calculs approximatifs, comme M. *Schülke* et ceux qui arrivent au Calcul différentiel par la voie de la Physique, comme M. *Richter*, penchent plutôt à la conservation des différentielles. Il est possible, quoique la littérature ne fournisse pas d'indications à cet égard, que, dans certaines écoles, on opère avec les différentielles comme si elles étaient des quantités déterminées.

Suivant les informations du rapporteur autrichien, les différentielles sont enseignées dans la moitié environ des établissements secondaires ; on les considère comme des quantités infiniment petites, sauf un établissement où les différentielles ne remplissent que le rôle d'abréger les calculs approximatifs. M. le rapporteur est d'avis que les professeurs eux-mêmes n'ont pas une idée suffiment claire de ces choses.

Les opinions peu différentes des rapporteurs autrichiens et danois ne sont pas isolées. En effet, la littérature scientifique elle-même n'a pas pris nettement parti parmi les diverses définitions des différentielles. La définition de *Cauchy*, dont nous avons déjà parlé, présente l'avantage qu'une relation homogène quelconque entre les différentielles se ramène immédiatement à une relation entre les dérivées, il n'y a, pour cela, qu'à diviser par une puissance convenable de dx. Mais on définit souvent la différentielle d'une fonction $y = f(x)$ par l'égalité : $dy = [f'(x) + \eta]\,dx$ où dy désigne l'accroissement total de la fonction y pour l'accroissement dx de la variable indépendante et $\lim\limits_{dx=0} \eta = 0$. Si l'on adopte cette définition qui paraît convenir mieux aux applications géométriques et physiques, les relations homogènes existant entre les différentielles ne sont que des relations approchées qui ne deviennent exactes qu'en divisant par une certaine puissance de dx et en passant à la limite $dx = 0$. L'une ou l'autre de ces définitions, pourvu qu'on les applique conséquemment, apportent également la clarté et la précision dans les Mathématiques, mais nous sommes, je crois, unanimes *à désirer que le brouillard métaphysique de l'infiniment petit n'entre pas dans l'enseignement secondaire*. Je suis d'avis que la méthode la plus sage est de ne pas introduire du tout les différentielles dans l'enseignement secondaire. Cette vue est justifiée par la tendance qui veut les éliminer de toute la Science. Dans l'Encyclopädie der math. Wissenschaften (II. A. 2. p. 69), M. *Voss* écrit à ce sujet : « Les différentielles employées par *Leibniz* pour développer d'une manière simple le Calcul différentiel, sont *superflues* dans la théorie actuelle, quoiqu'elles soient difficiles à remplacer dans les notations usuelles du Calcul intégral, des équations différentielles et

des applications géométriques et mécaniques. » C'était déjà l'avis de *D'Alembert; Poincaré* aussi se ralliait à ces vues dans sa conférence plusieurs fois citée. Combien paraît-il plus nécessaire de rejeter de l'enseignement les notions qui donnent lieu à tant de malentendus.

VI. — Fusion du Calcul différentiel et intégral avec les matières de l'enseignement secondaire.

Tous les pédagogues sont d'accord que, pour respecter l'ensemble harmonique et organisé de l'enseignement secondaire, les matières nouvelles réclamées par le mouvement réformiste ne doivent pas être placées, comme un supplément, à côté des matières anciennes, mais une fusion complète devra s'opérer entre elles. Le mouvement réformiste s'efforce, d'après M. *Klein,* de faire pénétrer d'un esprit nouveau les matières anciennes, plutôt que d'introduire des matières nouvelles [1]. M. *Timerding* manifeste une opinion pareille : « Nous insistons particulièrement sur le fait que les aspirations réformatrices ne tendent pas à faire suivre d'un cours de Calcul infinitésimal les matières enseignées en première, mais plutôt de faire entrer, dans toutes les parties de l'enseignement, les germes des notions du Calcul infinitésimal, germes qui ne manqueront pas, dans la suite, de se développer vigoureusement [2]. »

Conformément à ces vues répandues, la notion de fonction est préparée aujourd'hui avec soin depuis les classes inférieures : en insistant, dans l'enseignement de l'Arithmétique, sur les liaisons entre diverses grandeurs ; plus tard, au cours de l'enseignement algébrique, sur la représentation graphique des fonctions linéaire, quadratique et autres et, enfin, elle est préparée par l'introduction graduelle (lors même que le manuel y consacre un chapitre spécial) du Calcul différentiel et intégral. Je n'ai pas à exposer ici en détail les réponses se rapportant à ces questions. Toutes les réponses constatent que les matières nouvelles se sont fondues avec les anciennes. Seul le rapporteur russe est obligé d'écrire : Cette introduction n'est préparée dans les classes par aucune étude. Les nouvelles matières constituent un supplément tout nouveau au programme.

Pour opérer la fusion, plusieurs plans pourraient être adoptés : je n'ai qu'à rappeler le plan de Meran des professeurs allemands ; les plans d'études officiels de certains Etats allemands (en particulier, ceux de Wurtemberg, Bavière et Bade) publiés récemment parmi les brochures de la Commission internationale [3] ; les plans

---

[1] Klein-Riecke, p. 26.

[2] Timerding, *Die Mathematik in den physik. Lehrbüchern*, p. 109.

[3] Neue Erlasse in Bayern, Würtemberg und Baden, von Lietzmann, Geck, Cramer Band. II. 8.