Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1914)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉGALITÉS MULTIPLES DE G. TARRY
Autor: Aubry, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15523

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

milieu. Or, précisément, une approximation plus poussée des sciences physiques a conduit récemment certains savants à préférer d'autres géométries à celle d'Euclide, parce qu'elles expriment plus commodément encore — dans certains cas du moins — les phénomènes de notre univers. C'est ainsi qu'une même question de physique mathématique est traitée par les uns et les autres à l'aide des géométries réelles ou imaginaires, à trois ou quatre dimensions, d'Euclide, de Lobatschefski, de Minkowski, de MM. Wilson et Lewis. On ne saurait mieux montrer qu'il n'y a là qu'une question de pure commodité ; et, en présence des conceptions nouvelles, le tranquille philosophe géomètre est en droit de conclure : « Nous avions adopté une convention parce qu'elle nous semblait commode et nous disions que rien ne pourrait nous contraindre à l'abandonner. Aujourd'hui certains physiciens veulent adopter une convention nouvelle; ils jugent cette convention nouvelle plus commode, voilà tout; et ceux qui ne sont pas de cet avis peuvent légitimement conserver l'ancienne pour ne pas troubler leurs vieilles habitudes [1] ».

L. Rougier (Lyon).

ÉGALITÉS MULTIPLES [2] DE G. TARRY

Par suite de l'abondance des matières, nous avons dû retarder la publication de cette intéressante Note du regretté G. Tarry. *En nous envoyant le manuscrit, M. Aubry nous écrit : « J'ai l'honneur de vous adresser ci-joint une étude de M. G. Tarry qui me paraît des plus intéressantes et résultant de fragments d'une correspondance active que nous avons depuis quelque temps, fragments que j'ai réunis, coordonnés et présentés aussi clairement que j'ai pu. M. Tarry étant malade se désintéressait de cette étude et j'ai jugé qu'il serait regrettable qu'elle restât inconnue, aussi je lui ai demandé de m'autoriser à en solliciter l'insertion dans l'« Ens. math... » — On sait que M. Tarry mourut le 21 juin 1913.* N. de la Réd.

Définition. — L'égalité de plusieurs quantités est dite n^{uple} quand elle a lieu, en même temps pour les carrés de ces quantités,

---

[1] H. Poincaré, *Dernières pensées*, p. 54.

[2] Toute cette théorie est due à M. G. Tarry, dont on connaît les beaux travaux, si originaux et si suggestifs, sur la géométrie générale, la géométrie de situation, les carrés magiques, la géométrie modulaire et les imaginaires de Galois. Je n'ai fait que rédiger, sous forme didactique et avec son autorisation, ces curieuses démonstrations, aux résultats à la fois si élémentaires et si généraux, dont il avait bien voulu me faire part. J'y ai en outre ajouté, à titre d'application, le cas particulier des égalités doubles (Note .I.) A. Aubry, Dijon.

pour leurs cubes,... pour leurs $n^{\text{èmes}}$ puissances[1]. On indique une telle égalité par la notation

$$a + \ldots \overset{n}{=} \alpha + \ldots$$

On ne s'occupera ici que des égalités *complètes*, c'est-à-dire d'un même nombre de termes dans chaque membre; les termes sont supposés entiers et positifs.

Lemme I. *On ne change pas la nature d'une égalité* n^{uple} *en multipliant tous ses termes par un même nombre.* On supposera, en conséquence, que tous les termes sont débarrassés de leurs facteurs communs (Frolow).

Lemme II. *La somme, membre à membre, de deux égalités* n^{uples} *est elle-même une égalité* n^{uple} (Frolow).

Lemme III. *On a une nouvelle égalité* n^{uple} *en ajoutant un même nombre positif ou négatif* h *à tous les termes d'une égalité* n^{uple} (Frolow). Soit en effet

$$a + b + \ldots \overset{n}{=} \alpha + \beta + \ldots .$$

Posons

$$(a + h)^k = a^k + \text{A}a^{k-1} + \text{B}a^{k-2} + \ldots$$

A, B, ... désignant des quantités indépendantes de a; il viendra

$$(a + h)^k + (b + h)^k + \ldots = (\alpha + h)^k + (\beta + h)^k + \ldots$$

d'où

$$(a + h) + (b + h) + \ldots \overset{n}{=} (\alpha + h) + (\beta + h) + \ldots .$$

Lemme IV. *D'une équation* $(\text{n} - 1)^{\text{uple}}$, *on peut déduire une équation* n^{uple} *d'un nombre double de termes.* En effet, de $a + \ldots \overset{n-1}{=} \alpha + \ldots$ on tire, à cause de II et de III, l'égalité

$$\alpha^n + \ldots + (a + h)^n + \ldots = a^n + \ldots + (\alpha + h)^n + \ldots .$$

Théorème I. — *Les* 2^{n} *premiers entiers fournissent une égalité* $(\text{n} - 1)^{\text{uple}}$. On a, en effet,

$$(\alpha) \qquad 1 + 4 \overset{1}{=} 2 + 3$$

d'où, à cause du lemme IV,

$$1 + 4 + (2 + 4) + (3 + 4) \overset{2}{=} 2 + 3 + (1 + 4) + (4 + 4)$$

ou bien

$$1 + 4 + 6 + 7 \overset{2}{=} 2 + 3 + 5 + 8 .$$

[1] Elle est dite aussi *multigrade* ou *aux* n *premiers degrés*.

De même

$$1+4+6+7+(2+8)+(3+8)+(5+8)+(8+8)$$
$$\overset{3}{=} 2+3+5+8+(1+8)+(4+8)+(6+8)+(7+8)$$

et ainsi de suite.

Corollaire I. Si on ne s'astreint pas à n'avoir que des entiers consécutifs, on peut obtenir des égalités bien plus simples. Ainsi en faisant successivement $h=3, 5, 7, 4, 1, \ldots$ au lieu de $4, 8, 16, \ldots$ en partant de (α) on trouve

$$(\beta) \qquad 1+5+6 \overset{2}{=} 2+3+7$$

$$(\gamma) \qquad 1+5+8+12 \overset{3}{=} 2+3+10+11$$

$$(\delta) \qquad 1+5+9+17+18 \overset{4}{=} 2+3+11+15+19$$

$$(\varepsilon) \qquad 1+6+7+17+18+23 \overset{5}{=} 2+3+11+13+21+22$$

$$(\zeta) \qquad \left\{\begin{array}{l} 1+4+6+12+14 \\ +17+18+23+23 \end{array}\right\} \overset{6}{=} \left\{\begin{array}{l} 2+2+8+11+13 \\ +18+19+21+24 \end{array}\right.$$

. . . . . .

Le choix de la valeur de h se détermine par l'examen des différences des termes de la précédente égalité. Ainsi pour l'égalité quadruple (δ), on a les deux groupes de différences

4	8	16	17	1	9	13	17
	4	12	13		8	12	16
		8	9			4	8
			1				4

La différence 4 étant répétée le plus grand nombre de fois, en prenant $h=4$, on aura, pour l'égalité quintuple (ε) la disparition du plus grand nombre possible de termes.

II. Soit l'identité

$$(a-b)+b \overset{1}{=} (a-c)+c$$

traitée de même, elle donne en faisant $h=a-2b$,

$$(2a-3b)+(a-c)+c \overset{2}{=} (2a-2b-c)+(a-2b+c)+b\ ;$$

celle-ci, pour $h=a-2c$, donne

$$(3a-3b-2c)+(2a-3c)+(a-2b+c)+b$$
$$\overset{3}{=} (3a-2b-3c)+(2a-3b)+(a+b-2c)+c\ .$$

Et ainsi de suite. On pourrait d'ailleurs, en attribuant à h d'autres valeurs, obtenir une infinité d'autres formules particulières.

THÉORÈME II. — *Les* $n = 4(2k+1)$ *premiers entiers peuvent se partager en deux suites formant une égalité double. On suppose* $k > 0$. Disposons les termes comme dans l'exemple ci-dessous

28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

on aura un nombre impair de *quadrilles* de la forme

$$\begin{array}{|cc|} \hline A, & B \\ C, & D \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{|cc|} \hline n-h+1, & n-h \\ h, & h+1 \\ \hline \end{array}$$

et tels qu'on aura

$$(A+D)-(B+C)=2\ , \qquad (A^2+D^2)-(B^2+C^2)=\text{const.}$$

On peut donc écrire :

$$(\alpha) \qquad 23+2+26+4+23+5+21+7 \overset{2}{=} 27+1+25+3+24+6+22+8\ .$$

Or, pour le dernier quadrille, qui est de la forme

$$\begin{array}{|cc|} \hline a+3, & a+2 \\ a, & a+1 \\ \hline \end{array}$$

on voit aisément que la valeur de $(A^2+B^2)-(C^2+D^2)$ est le double de celle de $(A^2+D^2)-(B^2+C^2)$. Donc on a :

$$(20^2+10^2)-(19^2+9^2)+(18^2+12^2)-(17^2+11^2)=(16^2+15^2)-(13^2+14^2)$$

et de là

$$(\beta) \qquad 20+18+14+13+12+10 \overset{2}{=} 19+17+16+15+11+9\ ,$$

ce qui, avec (α), démontre le théorème.

Corollaire. Pour $k=0$, on n'aurait qu'un quadrille, ce qui ne pourrait conduire à une égalité telle que (α), ni à une autre telle que (β).

Pour $k=1$, on a une égalité analogue à (β).

Pour $k>1$, on a une égalité (β) et $k-1$ égalités (α).

D'ailleurs, pour qu'une égalité entre les n premiers entiers puisse avoir lieu, il faut que n soit non seulement pair, mais encore multiple de 4, car la somme des $2m$ premiers entiers est impaire en même temps que m.

THÉORÈME III. — Supposons, dans le lemme IV, que $a, \ldots \alpha, \ldots$ désignent les $4n$, les $8n$, les $16n, \ldots$ premiers entiers; en faisant successivement $h = 4n, 8n, 16n, \ldots$ on verra, à cause du lemme V, que les $4(2k+1)$, les $8(2k+1), \ldots$ premiers entiers donnent des égalités respectivement doubles, triples, quadruples, ... Par conséquent, *les* $2^m(2k+1)$ *premiers entiers peuvent se grouper en deux suites formant une égalité* m^{uple}.

Note I. — Egalités doubles.

THÉORÈME I. — *Une égalité double doit avoir plus de deux termes dans chaque membre.*

THÈORÈME II. — *On ne saurait avoir* $x + x + x \overset{2}{=} y + z + w$.

THÉORÈME III. — *Les trois termes ne sauraient être à la fois en progression arithmétique ou géométrique dans les deux membres.*

Problème I. Résoudre $x \overset{2}{=} y' + z' + w'$. Changeons y', z' et w' en $x - y$, $y - z$ et z; la question revient à la résolution de $x \overset{2}{=} (x - y) + (y - z) + z$ ou simplement de $x^2 = (x - y)^2 + (y - z)^2 + z^2$, d'où on tire

$$x = y - z + \frac{z^2}{y} .$$

Posons en conséquence $z = tv$, $y = ut$, u et v étant premiers entre eux; il viendra

$$x = ut - vt + \frac{v^2 t}{u} \qquad \text{d'où} \qquad t = su$$

et par suite

$$x = (u^2 - v + v^2)s , \qquad y = u^2 s , \qquad z = uvs ;$$

d'où, en négligeant le facteur commun s, la formule

$$(u^2 - uv + v^2) \overset{2}{=} v(v - u) - u(v - u) + uv ,$$

qui donne une infinité de solutions, u et v restant arbitraires.

Cor. L'égalité proposée peut s'écrire $0 + 0 + x \overset{2}{=} y' + z' + w'$, ou, en ajoutant $-x$ à chaque terme, $-x - x \overset{2}{=} (y - x) + (z - x) + (w - x)$, ce qui fournit cette autre relation

$$(uv - u^2 - v^2) + (uv - u^2 - v^2) \overset{2}{=} u^2 + v^2 + (u - v)^2 .$$

Problème II. *Résoudre* $-x+x \overset{2}{=} y'+z'-w'$. Ecrivons ainsi cette égalité

$$-x+x \overset{2}{=} (x-y-z)+(-x-y+z)+(2y)$$

$$\text{ou} \qquad x^2+x^2=(x-y-z)^2+(-x-y+z)^2+(2y)^2 ,$$

d'où, en simplifiant et continuant comme au précédent problème,

$$t=sv , \qquad y=su , \qquad z=sv^2 , \qquad 2x=3su^2+sv^2 ,$$

et, en négligeant le coefficient s,

$$-(3u^2+v^2)+(3u^2+v^2) \overset{2}{=} (3u^2-v^2-2uv)+(-3u^2+v^2-2uv)+4uv .$$

Cor. I. L'égalité proposée peut encore s'écrire $-x+x \overset{2}{=} -y'-z'-w'$: elle a donc toujours au moins deux solutions. Ainsi $-7+7 \overset{2}{=} -3-5+8$ peut encore s'écrire $-7+7 \overset{2}{=} 3+5-8$, ou bien, en ajoutant 7 partout,

$$7+14 \overset{2}{=} 2+4+15 \overset{2}{=} -1+10+12 .$$

II. Ajoutant x à tous les termes de l'égalité ainsi complétée $0-x+x \overset{2}{=} y'+z'+w'$, on trouve $x+2x \overset{2}{=} y''+z''+w''$: on a donc en même temps la solution de cette nouvelle égalité.

Théorème IV. — Posons

$$a^2+b^2=(a-fh)^2+(b+gh)^2+(fh-gh)^2 ,$$

il viendra

$$(\alpha) \qquad fa-gb=(f^2+g^2-fg)h .$$

Donc *si* a *et* b *sont liés par la relation* (α) *on aura*

$$a+b \overset{2}{=} (a-fh)+(b+gh)+(fh-bh) .$$

Ainsi, les suppositions $f=2$, $g=1$; $f=1$, $g=-1$; $f=3$, $g=1$; $f=3$, $g=2$; ... donnent ces théorèmes :

si $2a-b=3h$, on aura : $a+b \overset{2}{=} (a-2h)+(b+h)+h$.

si $a+b=3h$, on aura : $a+b \overset{2}{=} (a-h)+(b-h)+2h$:

si $3a-b=7h$, on aura : $a+b \overset{2}{=} (a-3h)+(b+h)+2h$.

si $3a-2b=7h$, on aura : $a+b \overset{2}{=} (a-3h)+(b+2h)+h$.

. . . . . .

Problème III. *Formule générale de l'égalité double.* Posons

$$x + y \overset{2}{=} (y + t) + z + w \ ;$$

on aura

$$x^2 = t^2 + z^2 + w^2 + 2tz + 2tw + 2zw = 2yt + t^2 + z^2 + w^2$$

d'où

$$tz + tw + zw = yt$$

ce qui demande qu'on puisse poser $zw = tu$. Ecrivons en conséquence

$$z = ab \ , \qquad w = cd \ , \qquad t = bd \ , \qquad u = ac \ ,$$

il viendra

$$(\beta) \quad (ab + bd + cd) + (ab + ac + cd) \overset{2}{=} (ab + ac + bd + cd) + ab + cd \ .$$

Cor. I. On peut tirer de là une infinité d'égalités doubles. Par exemple posons $c = b$ et ajoutons aux six termes — compris le terme zéro — le nombre $hb - ab - bd$; il viendra la formule

$$(h - a - d) + (h + a) + (h + d) \overset{2}{=} (h + a + d) + (h - a) + (h - d)$$

qui se simplifie, tout en restant symétrique en y faisant $d = 2a$.

II. *Résolution de* $A + B \overset{2}{=} x + y + z$. Assimilant à (β), on voit qu'on a à résoudre

$$A^2 + B^2 = (A + ac)^2 + (B - ac - cd)^2 + (cd)^2$$

d'où

$$(\gamma) \qquad c = \frac{Ba - Aa + Bd}{a^2 + d^2 + ad} \ .$$

Ainsi soit $A = 17$, $B = 3$; on voit, après quelques tâtonnements, que c est entier pour $a = 2$, $d = 3$. On trouve en conséquence

$$c = -1 \ , \qquad b = \frac{A - cd}{a + d} = 4$$

et par suite l'égalité double cherchée $3 + 17 \overset{2}{=} -3 + 8 + 15$.

Le problème a autant de solutions qu'il y a de valeurs de a et de d qui rendent entière la valeur du second membre de (γ).

On remarquera que (γ) fournit les théorèmes IV.

III. *Pour que l'équation* $A + B \overset{2}{=} x + y + z$ *soit résoluble, il faut et il suffit que le nombre* $A^2 + B^2 - AB$, *s'il n'est pas divisible par* 3, *ait au moins deux facteurs premiers de la forme* $6h + 1$[1].

[1] Ce théorème et le suivant m'ont été communiqués sans démonstration par M. G. Tarry.

Si cette équation est résoluble, on doit pouvoir écrire :

$$A = ab + bd + cd\ , \qquad B = ab + ac + cd\ .$$

Or on a dans ce cas :

$$A^2 + B^2 - AB = (a^2 + d^2 + ad)(b^2 + c^2 + bc)\ .$$

Ainsi la condition nécessaire et suffisante est que le nombre $A^2 + B^2 - AB$ puisse se décomposer en deux facteurs de forme $x^2 + y^2 + xy$, expressson qui ne peut avoir pour facteurs que 3 ou des nombres premiers de forme $6h + 1$.

Si le nombre $A^2 + B^2 - AB = (A + B)^2 - 3AB$ est divisible par 3, il en est de même de $A + B$; or ce cas a été traité plus haut. (Théorème IV.)

IV. *Supposons qu'on puisse écrire* $A^2 + B^2 - AB = X^2 + Y^2 - XY$; *en posant* $x = 2X - Y$, $y = 2Y - X$, *on aura :*

$$(\delta) \qquad A + B \overset{2}{=} \frac{A + B \pm x}{3} + \frac{A + B \pm y}{3} + \frac{A + B \mp x \mp y}{3}\ .$$

En effet, cette relation revient à

$$(\varepsilon) \qquad 3(A^2 + B^2 - AB) = x^2 + y^2 + xy$$

ou bien à

$$A^2 + B^2 - AB = \left(\frac{2x + y}{3}\right)^2 + \left(\frac{2y + x}{3}\right)^3 - \frac{2x + y}{3}\,\frac{2y + x}{3}\ .$$

(ε) donne $(x - y)^2 + 3xy \equiv 0 \pmod 3$, d'où $x \equiv y$ et $2x + y \equiv 0$. D'ailleurs on a :

$$(A + B)^2 \equiv (X + Y)^2 \equiv (2X - Y)^2 \equiv x^2 \equiv y^2\ .$$

Ainsi si $A + C$ est un non-multiple de 3, il en est de même de x et de y, et on prendra, pour les signes de x et de y, ceux qui donnent pour (δ) des nombres entiers.

V. *L'équation* $x + y = z + A + B$ *est toujours soluble, et elle a même, en général, quatre solutions.* On n'a, pour s'en assurer, qu'à changer dans (β) a et b, 1° en $\pm a$ et $\pm b$, 2° en $\pm b$ et $\pm a$.

Note II. — Carrés panmagiques de module $4n$.

Soit $n = 3$. Considérons, par exemple, l'égalité entre les 12 premiers entiers

$$1 + 11 + 3 + 9 + 8 + 7 = 12 + 2 + 10 + 4 + 5 + 6$$

dont les termes sont assujettis à cette condition que dans le même membre, il n'y ait pas de nombres complémentaires à 13 ; et formons avec ces nombres la figure ci-dessous

1	1	11	11	3	3	9	9	8	8	7	7
12	12	2	2	10	10	4	4	5	5	6	6

de quadrilles différents disposés horizontalement et tels que les nombres inférieurs soient les compléments à 13 des nombres supérieurs. Répétons identiquement cinq fois cette rangée sous la première : nous aurons évidemment un carré *panmagique* (c'est-à-dire tel qu'il reste magique en le séparant par une verticale ou une horizontale et assemblant autrement le carré, ou encore tel que toutes ses *lignes*[1] soient magiques).

De même, construisons la colonne ci-contre d'une manière analogue à l'aide de l'égalité

$$12 + 36 + 48 + 60 + 108 + 132 = 0 + 24 + 72 + 84 + 96 + 120 ,$$

et répétons la colonne cinq fois côte à côte : on obtiendra un second carré panmagique.

12	120
12	120
36	96
36	96
48	84
48	84
60	72
60	72
108	24
108	24
132	0
132	0

Additionnons, nombre à nombre, les deux carrés, il en résultera un troisième carré panmagique des 144 premiers entiers, dont voici ci-dessous un fragment :

13	121	23	131	...
24	132	14	122	..
37	97	47	107	...
48	108	38	98	...
.	.	.	.	.

On remarque que, par sa construction, tout carré de quatre nombres de ce dernier est magique, ce qu'on désigne en disant qu'il est à *grille* carrée de 4.

On ne connaissait pas de méthode simple de construction de tels carrés. Quant à ceux de module

[1] On appelle *ligne arithmétique* dans un carré magique, de module n, l'ensemble des n nombres d'une même horizontale, d'une même verticale, d'une même diagonale, ou d'une même *parallèle* à une diagonale, cette parallèle se composant de deux parties aboutissant aux extrémités d'une même verticale : on l'appelle aussi *diagonale brisée*.

$4n + 2$, M. G. TARRY[1] doit bientôt faire voir que ces carrés sont doués de $2n$ lignes magiques et pas davantage.

M. G. TARRY est en outre l'auteur d'une foule de remarques, extensions, méthodes et découvertes sur les carrés magiques, théorie qu'il a poussée jusqu'à ses dernières limites, par ses *constellations*[2] et ses carrés magiques aux n premiers degrés, dont il publiera sous peu la construction.

A. AUBRY (Dijon).

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UNE PLANÈTE AUTOUR DU SOLEIL

Les équations différentielles du mouvement d'un point matériel m, assujetti à l'action d'une force centrale newtonienne, sont :

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mx}{r^3} \; ; \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{my}{r^3}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 .$$

J'introduis une nouvelle variable indépendante s par l'équation

$$dt = r\,ds .$$

---

[1] A lire du même savant, sur le même sujet :

N. A., 1899, *Sur les lignes arithmétiques.* — *A. F.*, 1900, *Le prob. des 36 officiers*, solution longtemps cherchée de la célèbre question d'Euler. — *A. F.*, 1903, *Carrés panmagiques de base* 3n, figures longtemps crues impossibles. — *A. F.*, 1904, *Carrés cabalistiques* (panmagiques et aux deux premiers degrés) *eulériens* (ou des 8^2n^2 officiers) *de base* 8n. — *A. F.*, 1905, *Le carré trimagique de* 128 (magique aux trois premiers degrés). — *C. R.*, 1906, *Sur un carré magique*, note présentée par H. Poincaré et annonçant la possibilité de construire des carrés n magiques (magiques aux n premiers degrés). — *Soc. Philom.*, 1907, *La magie arith. dévoilée.* — *Soc. math.*, 1911, *Sur la magie arith.*

[2] Sur un carré magique supposé répété à droite et à gauche, au-dessus et au-dessous, on promène un carton percé de fenêtres de la dimension des cases. Il y a des dispositions de ces fenêtres telles que la somme des nombres vus en même temps est constante quelle que soit la position du carton sur le carré magique : une semblable disposition est une *constellation*, qui, par conséquent, constitue la magie la plus générale qui puisse être imaginée, surtout si on étend cette conception aux espaces supérieurs. M. TARRY a calculé qu'un carré magique de module n comporte $(n-1)!$ constellations différentes et $[(n-1)!]^{m-1}$ s'il est généralisé dans l'espace à m dimensions. (Voir G. ARNOUX, *Espaces arith.*, p. 75 et seq.)