Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 17 (1915)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPRIÉTÉS INVOLUTIVES DUALISTIQUES DES TRIANGLES
Autor: Crelier, L.
Kapitel: § III. — Autres cas spéciaux du groupement des involutions.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16324

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Nous pouvons encore remarquer que le côté AB formé de deux rayons simples confondus représente les deux rayons conjugués du côté AC et réciproquement, AC représente les deux rayons simples confondus conjugués du côté AB.

Nous pouvons observer également que les deux points conjugués du sommet C_1 par exemple, sont confondus en B_1 et réciproquement, les conjugués de B_1 sont confondus en C_1.

§ III. — Autres cas spéciaux du groupement des involutions.

17. *Le triangle fondamental est une droite* ABC *ou* p *et le triangle auxiliaire* $A_1B_1C_1$ *est quelconque.* (Fig. 3.)

Les observations et les raisonnements du cas général sont valables. Nous aurons en A, B, C les mêmes groupements de rayons par cycles hexagonaux fermés.

Les faisceaux obtenus formeront des involutions dans lesquelles les premiers rayons doubles seront confondus avec la droite p. Les seconds seront les conjugués harmoniques des premiers par rapport à un côté du triangle auxiliaire comme a_1 en A et à son homologue $AA_1 = a'_1$.

Les points de coupe de ces seconds rayons doubles avec les côtés du triangle auxiliaire sont les pieds des céviennes du pôle trilinéaire P de p par rapport à ce triangle $A_1B_1C_1$.

Les involutions en A, B, C, prises deux à deux, sont doublement homologiques puisqu'elles ont deux rayons doubles conjugués, confondus en p. Ce sont du reste les involutions de rayons

18. *Le triangle fondamental se ramène à trois droites concourantes* a_1, b_1, c_1 *passant par le point* P *tandis que le triangle auxiliaire* ABC *est quelconque.* (Fig. 2.)

Les observations et les raisonnements du cas général sont toujours valables et nous aurons sur a_1, b_1 et c_1 les mêmes groupements de points par cycles hexagonaux fermés.

Les ponctuelles obtenues forment des involutions de points dans lesquelles les premiers points doubles sont confondus avec le point commun P. Les seconds sont les conjugués harmoniques des premiers par rapport au sommet correspondant du triangle auxiliaire, comme A, et à son conjugué $\overline{A}_1$ sur a.

Ces points doubles ci sont les points harmoniquement associés de P.

Les involutions sur a_1, b_1, c_1 considérées deux à deux sont doublement homologiques parce qu'elles ont toujours deux points doubles conjugués, confondus en P. Nous avons déjà

étudiées précédemment, § II, n° 12. Les quatrièmes droites engendrées sont les seconds rayons doubles $\overline{d}_{2.a}$, $\overline{d}_{2.b}$ et $\overline{d}_{2.c}$ des faisceaux involutifs en A_1, B_1 et C_1, formés au moyen des ponctuelles involutives sur les côtés opposés.

Les faisceaux en A, B, C ne peuvent pas former de ponctuelles sur p.

Les ponctuelles involutives sur a_1, b_1, c_1 du triangle auxiliaire sont celles étudiées au § II, n° 12. Elles engendrent les coniques $K_{1.a}$, $K_{1.b}$ et $K_{1.c}$.

Les triangles comme $II_a II_b II_c$ et $II'_a II'_b II'_c$ compris entre les rayons a_2, b_2, c_2 et a'_2, b'_2, c'_2 conjugués des premiers, font toujours partie d'une involution de triangles analogue à celle du cas général. ABC est le premier triangle double; le second est formé par les seconds rayons doubles $d_{2.a}$, $d_{2.b}$ et $d_{2.c}$. Les sommets sont $D_{2.a}$, $D_{2.b}$, $D_{2,c}$.

Le conjugué du triangle auxiliaire de $A_1B_1C_1$ est le triangle des rayons a'_1, b'_1, c'_1 ou le triangle $P_1P_2P_3$ dont les sommets sont les points harmoniquement associés de P. Le point P est également un triangle limite; son conjugué se détermine par la méthode ordinaire.

Quant à ce triangle, nous avons simplement à remarquer que P est le point de coupe des

rencontré ces involutions au § II, n° 11 Les quatrièmes points engendrés sont les seconds points doubles des ponctuelles involutives sur les côtés a, b et c du triangle auxiliaire : $\overline{D}_{2.a}$, $\overline{D}_{2.b}$, $\overline{D}_{2.c}$. Ces dernières involutions sont déterminées par les faisceaux involutifs dans les sommets opposés du même triangle. Chacun de ces points, comme $\overline{D}_{2.c}$ par exemple, appartient à la droite de jonction des deux points doubles $D_{2.a}$ et $D_{2.b}$.

Il est évident que les ponctuelles sur a_1, b_1, c_1 ne peuvent pas engendrer de faisceaux en P.

Les faisceaux en A, B, C du triangle auxiliaire sont ceux étudiés au § II, n° 11. Ils engendrent les coniques $C_{1.a}$, $C_{1.b}$ et $C_{1.c}$.

Les triangles comme $A_2B_2C_2$ et $A'_2B'_2C'_2$ déterminés par les points conjugués des involutions font partie d'une involution de triangles, absolument comme dans le cas général. Le point P forme le premier triangle double. Le second est celui des points doubles $D_{2.a}$, $D_{2.b}$ et $D_{2.c}$.

Le conjugué du triangle auxiliaire ABC est $\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1$ avec $\overline{A}_1$ sur a et a_1, $\overline{B}_1$ sur b et b_1 puis $\overline{C}_1$ sur c et c_1. Ses côtés passent respectivement par $\overline{D}_{2.a}$, $\overline{D}_{2.b}$ et $\overline{D}_{2.c}$; ce sont aussi les droites harmoniquement associées de p.

Le triangle formé par les points de coupe de p avec a_1, b_1 et c_1 est rectiligne; il fait éga-

quatrièmes droites engendrées par les involutions en A, B et C. Les rayons AP, BP et CP sont conjugués, donc P est un triangle limite de côtés AP, BP et CP.

Les propriétés générales relatives aux ponctuelles sur a, b et c ne subsistent plus dans ce cas particulier.

Par contre la propriété relative aux droites $II_a II'_a$, $II_b II'_b$, $II_c II'_c$ se retrouve sous une forme modifiée. *Les droites* $II_a II'_a$, $II_b II'_b$ et $II_c II'_c$ *sont les rayons doubles conjugués* $\overline{d}_{2.a}$ *en* A_1, $\overline{d}_{2.b}$ *en* B_1 *et* $\overline{d}_{2.c}$ *en* C_1; ces trois rayons passent évidemment par le même point P.

Ceci découle du fait que les faisceaux en A, B et C sont doublement homologiques et que les secondes droites engendrées sont précisément ces mêmes rayons doubles $\overline{d}_{2.a}$, $\overline{d}_{2.b}$ et $\overline{d}_{2.c}$.

19. *Le triangle fondamental est une droite* ABC *et la triangle auxiliaire est un point* P. (Fig. 4.)

Pour être tout à fait précis, nous dirons : les trois sommets A, B, C du triangle fondamental sont en ligne droite sur p, et les trois côtés du triangle

lement partie de l'involution et son conjugué s'obtient d'après le procédé général sans autre remarque particulière.

A ce sujet nous pouvons observer que p est la droite qui passe par les quatrièmes points $\overline{D}_{2.a}$, $\overline{D}_{2.b}$ et $\overline{D}_{2.c}$ engendrés par les involutions; p joue le rôle de tangente commune et c'est par conséquent un triangle rectiligne limite. Encore une fois, les sommets sont sur a_1, b_1 et c_1.

Les propriétés générales ayant trait aux faisceaux en A_1, B_1 et C_1 n'existent plus dans ce cas particulier.

Par contre la propriété des points de coupe des côtés homologues A_2B_2 avec $A'_2B'_2$, B_2C_2 avec $B'_2C'_2$, etc., se retrouve sous la forme suivante : *Les points de coupe des côtés homologues des triangles conjugués sont les points fixes* $\overline{D}_{2.a}$, $\overline{D}_{2.b}$ *et* $\overline{D}_{2.c}$ *de la droite* p. Les lignes de jonction de ces points de coupe sont évidemment confondues avec p.

Ceci découle également du fait que les involutions sur a_1, b_1, c_1 sont doublement homologiques et que les seconds points engendrés sont justement ces mêmes points doubles $\overline{D}_{2.a}$, $\overline{D}_{2.c}$, $\overline{D}_{2.b}$.

20. *Le triangle fondamental est un point et le triangle auxiliaire une droite.* (Fig. 4.)

Nous pouvons dire aussi que les trois côtés a_1, b_1 et c_1 du triangle fondamental passent par un même point P et que les trois sommets du triangle auxi-

auxiliaire a_1, b_1, c_1 passent par le même point P.

Nous avons à nous reporter d'une part, au cas général et d'autre part, aux deux derniers cas particuliers précédents, où le triangle est déjà un point.

Comme dans ces cas, nous obtenons ici, en A, B et C des groupements de rayons par cycles hexagonaux fermés.

liaire A, B et C sont en ligne droite sur p.

Les termes de comparaison seront d'abord le cas général puis en second lieu, l'avant-dernier cas particulier où le triangle auxiliaire était déjà formé de trois points en ligne droite.

De la même manière que précédemment nous obtenons sur les côtés a_1, b_1 et c_1 des groupements de points par cycles hexagonaux fermés.

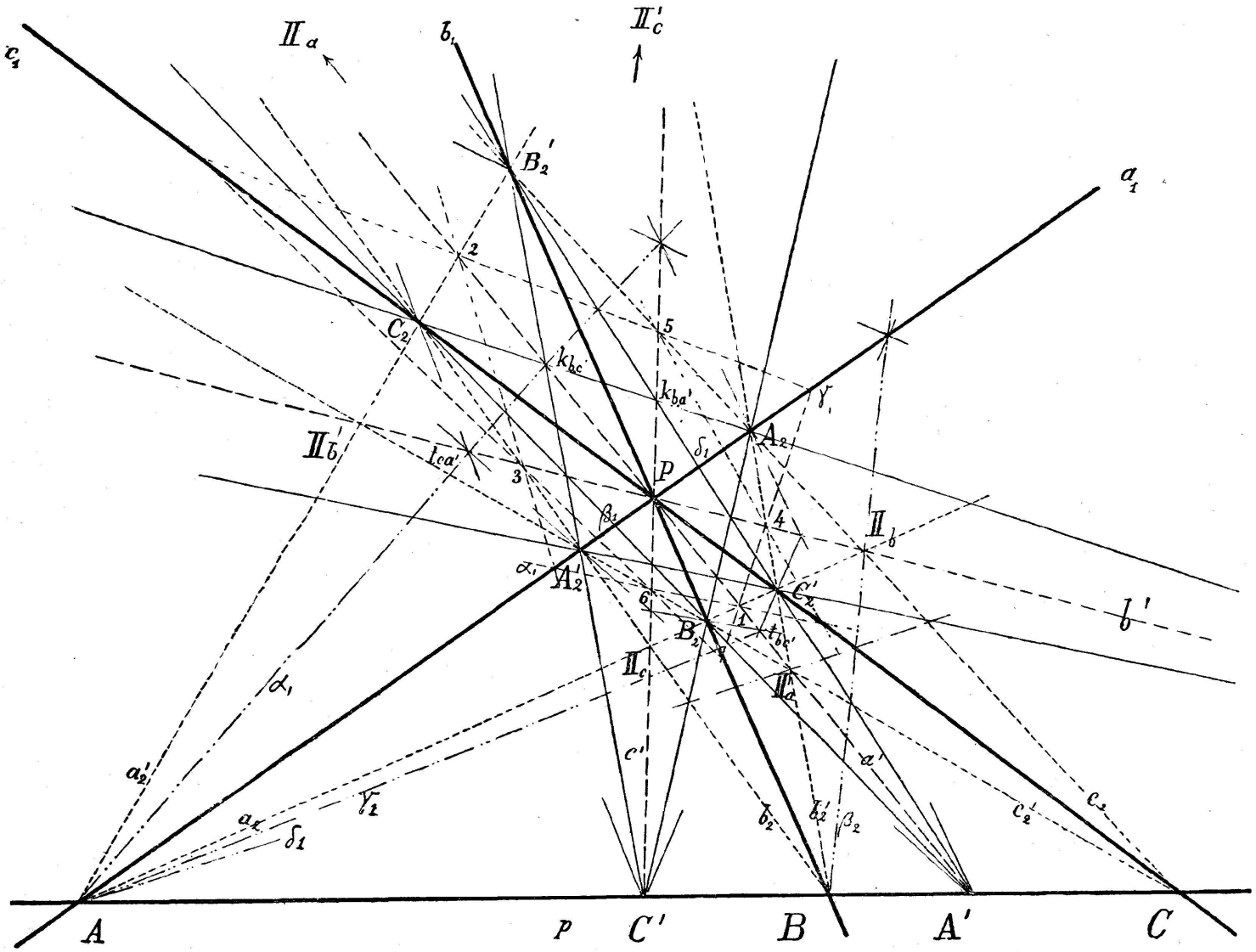

Fig. 4.

Les faisceaux obtenus en A, B et C forment des involutions dans lesquels les rayons doubles sont, premièrement la droite p et secondement les trois droites a_1, b_1, c_1.

Ces involutions considérées deux à deux sont doublement homologiques, puisqu'elles ont deux rayons doubles conjugués confondus en p. Les quatrièmes droites engendrées sont déterminées par le point P et par le point de coupe de deux autres rayons conjugués quelconques, comme II_c sur a_2 et b_2.

Ces droites par P *sont les conjugués harmoniques du côté auxiliaire correspondant* a_1, b_1 *ou* c_1 *par rapport aux deux autres.*

La droite $\mathrm{II}_c\mathrm{II}'_c$ par P coupera p en C′ qui est le conjugué harmonique de C par rapport à A et B.

Les points conjugués comme II_c et II'_c sont donc en ligne droite et d'autre part cette droite passe par P puisque P est l'intersection de deux rayons doubles.

Nous désignerons cette droite par c'. Dans le quadrilatère complet $a_2a'_2\,b_2b'_2$, les droites c_1, c' et p sont les diagonales ; les points diagonaux C et C′ sur p seront donc les conjugués harmoniques des sommets opposés A et B.

En outre les rayons c_1 et c' en P seront conjugués harmoniques de a_1 et b_1.

Les ponctuelles involutives sur a_1, b_1 et c_1 sont identiques à celles de la partie dualistique ci-contre ; elles sont double-

Les involutions obtenues sur a_1, b_1, c_1 admettent le point P comme premier point double et leurs seconds points doubles sont les sommets du triangle auxiliaire A, B, C.

Ces involutions considérées deux à deux sont doublement homologiques à cause des points doubles conjugués et confondus en P. Les quatrièmes points enveloppés sont déterminés par la droite p et par deux autres points conjugués quelconques.

Les points considérés sur p *sont les conjugués harmoniques du point auxiliaire correspondant* A, B *ou* C *par rapport aux deux autres.*

La droite A_2B_2 coupe p en C′ par exemple, et C′ est le conjugué harmonique de C par rapport à A et B.

Les droites conjuguées A_2B_2 et $A'_2B'_2$ passent donc par un même point et celui-ci se trouve sur p, puisque p est la jonction de deux points doubles conjugués.

Nous désignerons ce point par C′. Dans le quadrangle complet $A_2B_2A'_2B'_2$ les points P, C et C′ seront évidemment les points diagonaux ; les diagonales c_1 et c' seront les conjugués harmoniques des côtés opposés a_1 et b_1.

En outre les points C et C′ sur p seront les conjugués harmoniques de A et B.

Les faisceaux involutifs par les points A, B et C sont identiques à ceux de la partie dualistique ci-contre. Ils sont

ment homologiques et engendrent les points A′, B′ et C′.

Les triangles déterminés par les rayons conjugués comme a_2, b_2, c_2 et a'_2, b'_2, c'_2 soient $\Pi_a\Pi_b\Pi_c$ et $\Pi'_a\Pi'_b\Pi'_c$, forment l'involution de triangles, comme dans le cas général.

Les triangles doubles sont le triangle ABC sur la droite p et le point de coupe des côtés du triangle auxiliaire soit P.

Les propriétés des triangles conjugués prennent maintenant la forme suivante :

1. *Les lignes de jonction des sommets homologues sont confondues avec les droites* a′, b′ *ou* c′.

2. *Les lignes de jonction des sommets non homologues comme* $\Pi_b\Pi'_c$, $\Pi'_b\Pi_c$ *ou* $\Pi_a\Pi'_c$, $\Pi_c\Pi'_a$ *etc., passent respectivement par* A′, B′ *ou* C′.

3. *Dans l'hexagone* $\Pi_a\Pi'_c\Pi_b\Pi'_a\Pi_c\Pi'_b$ *les points de coupe des côtés opposés sont en ligne droite sur* p *et les lignes de jonction des sommets opposés passent par le même point* P.

4. *Les triangles circonscrits à deux triangles conjugués et dont les côtés passent respectivement par* A, B *ou* C *sont aussi des triangles conjugués.*

Les démonstrations ou les remarques des cas précédents s'appliquent à priori aux propriétés ci-dessus.

doublement homologiques et engendrent les droites a', b' et c'.

Les triangles déterminés par les points conjugués $A_2B_2C_2$ et $A'_2B'_2C'_2$... forment l'involution des triangles conjugués de la même manière que dans le cas général.

Les triangles doubles sont d'abord le point de coupe P des côtés du triangle fondamental, puis le triangle ABC des points doubles sur ces côtés.

Les propriétés des triangles conjugués prennent maintenant la forme suivante :

1. *Les points de coupe de deux côtés homologues sont confondus avec les points* A′, B′ *ou* C′.

2. *Les points de coupe de deux côtés non homologues comme* A_2B_2, $A'_2C'_2$ *ou* A_2C_2, $A'_2B'_2$ *etc., sont respectivement sur* a′, b′ *ou* c′.

3. *Dans l'hexagone* $(a_2)(c'_2)(b_2)(a'_2)(c_2)(b'_2)$ *les lignes de jonction des sommets opposés passent par le point* P *et les points de coupe de côtés opposés sont sur la même droite* p.

4. *Les triangles inscrits dans deux triangles conjugués et dont les sommets se trouvent respectivement sur les droites* a_1, b_1 *ou* c_1 *sont aussi des triangles conjugués.*

Les raisonnements et les démonstrations sont les mêmes que dans les cas précédents.

§ IV. — Coniques particulières.

21. Nous nous reporterons au cas où le triangle auxiliaire se ramène à trois droites concou-

22. Nous reviendrons au cas où le triangle auxiliaire ABC se ramène à trois points en ligne