Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 17 (1915)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REMARQUES AU SUJET DE LA CONSTRUCTION DES CENTRES DE COURBURE DES CONIQUES

Autor: d' Ocagne, Maurice

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16325

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

REMARQUES AU SUJET DE LA CONSTRUCTION

DES

CENTRES DE COURBURE DES CONIQUES

PAR

M. Maurice d'Ocagne
Professeur à l'Ecole Polytechnique de Paris.

Dans ce sujet tout élémentaire, et même, peut-on dire, bien rebattu, les remarques qui suivent ne tendent qu'à apporter un peu d'ordre, en vue surtout d'un intérêt didactique. La multiplicité des solutions du problème, qui ont été tirées de points de départ très divers, n'a pas laissé de produire quelque confusion. Il n'est évidemment pas bien difficile de réduire l'une à l'autre deux quelconques de ces solutions ; pur exercice de géométrie élémentaire. Mais il semble préférable de les grouper suivant un enchaînement d'ensemble en partant de l'une d'elles particulièrement facile à établir directement. Celle qui nous a paru devoir être choisie à cet égard est, à la fois, la plus ancienne (car elle remonte au début du XVIIIe siècle) et la plus classique ; elle constitue d'ailleurs, comme nous allons le faire voir, une conséquence pour ainsi dire immédiate de la propriété de la normale qui peut être regardée pour celle-ci comme fondamentale, à savoir qu'elle est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs aboutissant aux foyers.

Cette construction ci-dessous numérotée I, a été donnée dès 1708 par le géomètre anglais Keill dans les *Philosophical Transactions* (t. XXVI, p. 177).

Toutes les autres constructions ici envisagées, sauf celle du n° V qui est due à M. Genty (*Nouv. Ann. de Math.*, 1883,

p. 238), sont empruntées à Mannheim qui les a obtenues, indépendamment les unes des autres, par des considérations spéciales de géométrie cinématique, soit dans un mémoire publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1857, p. 322), soit dans son *Cours de géométrie descriptive de l'Ecole Polytechnique* (2e éd., p. 174). Parmi ces constructions, la plus connue est celle que nous obtenons ici sous le n° II. L'*Encyclopédie des sciences mathématiques* (éd. française, t. III, vol. 3, p. 139) nous a appris que cette construction avait été rencontrée, dès 1843, par un auteur du nom de Schellbach, dans un travail publié à part et qui ne s'est pas répandu en dehors d'un cercle des plus restreints. Il est à peine besoin d'ajouter que jamais, bien certainement, Mannheim n'a eu connaissance de ce travail, et qu'il est arrivé directement, de son côté, à la construction en question, plus particulièrement connue sous son nom.

Ajoutons que si l'on a, sur la figure, tracé une ellipse, les démonstrations ici données s'étendent sans aucune modification au cas de l'hyperbole.

I. — Si φ, φ' et ω sont les angles que les rayons vecteurs MF, MF′ et la normale MN font avec l'axe OA, on a[1]

$$2\omega = \varphi + \varphi' ,$$

et, par suite

$$2d\omega = d\varphi + d\varphi' .$$

Or, si les perpendiculaires élevées en F et en F′ aux rayons vecteurs MF et MF′ coupent en E et en E′ la normale MN et si ds est l'arc infiniment petit décrit par le point M, on a, en appelant C le centre de courbure répondant à M,

$$ds = \mathrm{ME} \,.\, d\varphi = \mathrm{ME'} \,.\, d\varphi' = \mathrm{MC} \,.\, d\omega .$$

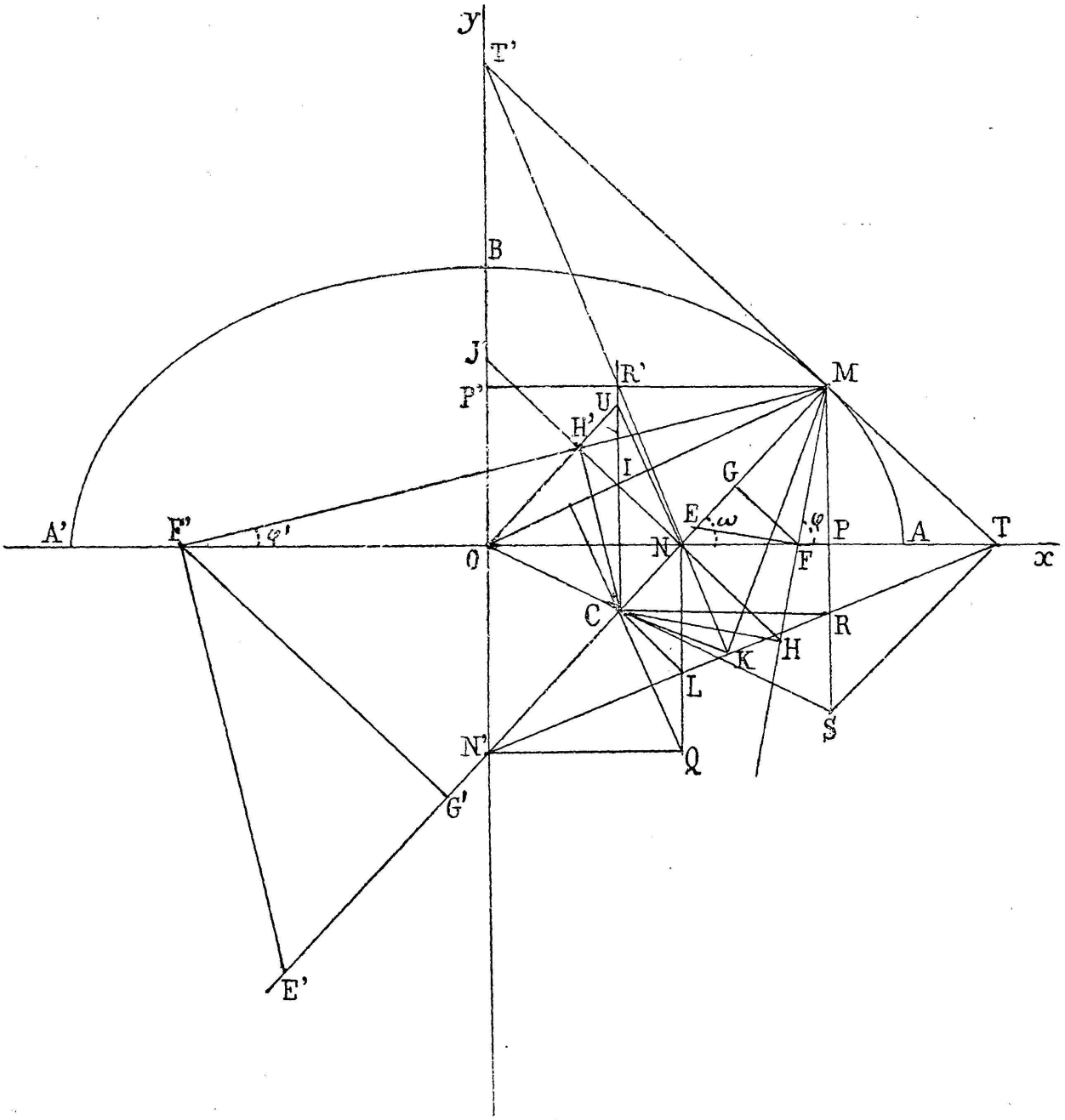
Par suite, l'égalité précédente devient

$$\frac{2}{\mathrm{MC}} = \frac{1}{\mathrm{ME}} + \frac{1}{\mathrm{ME'}}$$

[1] Dans le cas de l'hyperbole on aurait $2\omega - \frac{\pi}{2} = \varphi + \varphi'$, mais la relation différentielle resterait la même.

qui exprime que *les points* M *et* C *sont conjugués harmoniques par rapport aux points* E *et* E′.

Si donc, nous projetons orthogonalement ces quatre points une première fois sur l'un des rayons vecteurs, une seconde fois sur la normale, le point correspondant à C est conjugué



harmonique de M par rapport aux projections G et G′ des foyers sur la normale. Or, ce conjugué harmonique n'est autre que le point N où la normale rencontre l'axe focal. On a en effet, en valeur absolue

$$\frac{NG}{NG'} = \frac{NF}{NF'} = \frac{MF}{MF'} = \frac{MG}{MG'}.$$

Donc si CH est perpendiculaire au rayon vecteur MF, HN est perpendiculaire à MN. De là, la construction :

Elever en N *à la normale* MN *la perpendiculaire* NH *qui rencontre le rayon vecteur* MF *en* H ; *la perpendiculaire élevée en* H *à* MH *passe par le centre de courbure* C.

De même, bien entendu, avec le rayon vecteur MF'.

II. — Si la droite HH' rencontre le diamètre OM en I, les rapports anharmoniques (FNOF') et (HNIH') sont égaux comme projectifs l'un de l'autre, et comme ces rapports comprennent respectivement les facteurs $\frac{OF}{OF'}$ et $\frac{NH}{NH'}$ tous deux égaux à -1, on a

$$\frac{IH}{IH'} = \frac{NF'}{NF} = \frac{MF'}{MF} = \frac{\sin \widehat{MFF'}}{\sin \widehat{MF'F}} .$$

Mais dans le triangle isocèle CHH', on a

$$\frac{IH}{IH'} = \frac{\sin \widehat{ICH}}{\sin \widehat{ICH'}} .$$

Donc

$$\frac{\sin \widehat{ICH}}{\sin \widehat{ICH'}} = \frac{\sin \widehat{MFF'}}{\sin \widehat{MF'F}} .$$

Comme d'autre part

$$\widehat{ICH} + \widehat{ICH'} = \widehat{HCH'} = \pi - \widehat{HMH'} = \widehat{MFF'} + \widehat{MF'F} ,$$

il en résulte que

$$\widehat{ICH} = \widehat{MFF'} , \qquad \widehat{ICH'} = \widehat{MF'F} .$$

Les angles ICH et MFF' étant égaux, et leurs côtés CH et MF étant perpendiculaires, les autres le sont aussi ; autrement dit, CI est perpendiculaire à FF'. De là, la construction :

Elever en N *à la normale* MN *la perpendiculaire* NI *qui rencontre en* I *le diamètre* OM ; *la perpendiculaire abaissée de* I *sur l'axe* AA' *passe par le centre de courbure* C.

III. — Si MS et TS sont respectivement perpendiculaires à l'axe AA' et à la tangente MT, les triangles MTS et INC sont

homothétiques comme ayant leurs côtés deux à deux parallèles. Il en résulte que la droite unissant les sommets S et C passe par le point de rencontre O des droites MI et TN. De là, la construction :

Mener par M *et* T *des perpendiculaires respectivement à l'axe* AA′ *et à la tangente* MT ; *ces perpendiculaires se coupant en* S, *la droite* OS *passe par le centre de courbure* C.

IV. — La construction II montre que l'on a

$$\frac{CN}{CN'} = \frac{IN}{IJ} = \frac{MT}{MT'}.$$

Il en résulte que, sur les hypoténuses des triangles rectangles NQN′ et TOT′ qui ont leurs côtés homologues deux à deux perpendiculaires, les points C et M sont homologues ; donc aussi, les droites QC et OM, et, par suite, ces droites sont perpendiculaires entre elles. De là, la construction :

Elever aux axes, par les points N *et* N′ *où les rencontre la normale en* M, *des perpendiculaires qui se coupent en* Q ; *la perpendiculaire abaissée de* Q *sur le diamètre* OM *passe par le centre de courbure* C.

A titre de variante de cette construction, remarquons que si, par le centre O, on mène au diamètre OM la perpendiculaire[1] MD qui coupe NN′ en D, on a NC = DN′.

V. — Si l'on mène par O une perpendiculaire à la tangente TT′ et, par suite, aussi à NI[2], et par N une perpendiculaire à OM, ces deux droites se coupant en U, OI et NI sont deux des hauteurs du triangle ONU ; donc la perpendiculaire IC menée de I au côté ON constitue la troisième hauteur du triangle ; elle passe, par suite, par le troisième sommet U. De là, la construction :

Si la perpendiculaire abaissée du centre O *sur la tangente* TT′ *et la perpendiculaire abaissée de* N *sur le diamètre* OM

---

[1] Nous laissons au lecteur le soin d'ajouter cette perpendiculaire sur la figure.

[2] C'est par hasard que, sur la figure, cette droite semble passer par H′. Il n'en est généralement pas ainsi.

se coupent en U, *la perpendiculaire abaissée de* U *sur l'axe* ON *passe par le centre de courbure* C.

VI. — Les droites CI et NT′ se coupant en R′, on a

$$\widehat{IR'N} = \widehat{OT'N} .$$

Mais le quadrilatère OT′MN est inscriptible, ses angles en O et en M étant droits. Donc

$$\widehat{OT'N} = \widehat{OMN} .$$

Par suite,

$$\widehat{IR'N} = \widehat{IMN} ,$$

et le quadrilatère IR′MN est aussi inscriptible. Il en résulte, puisque son angle en N est droit, qu'il en est de même de son angle en R′. Autrement dit, MR′ est perpendiculaire à IR′, par suite à OB. De là, la construction :

Mener par M *une perpendiculaire à l'axe* OB, *qui rencontre en* R′ *la droite joignant le point de rencontre* T′ *de la tangente avec l'axe* OB, *au point de rencontre* N *de la normale avec l'axe* OA ; *la perpendiculaire abaissée de* R′ *sur* OA *passe par le centre de courbure* C.

Nous placerons ici une observation, qui pourrait être présentée également à propos des constructions données aux n°s II, III, V et VIII, à savoir qu'on peut évidemment répéter la même construction en intervertissant le rôle des deux axes, *mutatis mutandis*. Il en résulte ici, par exemple, que *les perpendiculaires menées respectivement par* M *à* OA *et par* C *à* OB *se coupent en* R *sur la droite* TN′.

VII. — Dans le triangle TN′T′, les droites TO et N′M sont des hauteurs ; par suite, la droite T′N est la troisième hauteur et l'angle T′KN′ est droit. Il en résulte, l'angle T′MN′ étant également droit, que le quadrilatère T′MKN′ est inscriptible. Donc

$$\widehat{N'MK} = \widehat{N'T'K} = \widehat{CR'K} .$$

et le quadrilatère CR′MK est inscriptible ; et comme l'angle en R′ de ce quadrilatère est droit, il en est de même de l'angle en K. De là, la construction :

Les droites NT′ *et* N′T *se coupant en* K, *la perpendiculaire élevée en* K *à* MK *passe par le centre de courbure* C.

VIII. — On a

$$\frac{LN}{RM} = \frac{N'N}{N'M} = \frac{N'O}{N'P'} = \frac{CI}{CR'}.$$

Or, nous avons vu, au n° VI, que la figure MRCR′ est un rectangle ; donc RM = CR′, et par suite, si l'on compare le premier et le dernier rapport, LN = CI. Il en résulte que la figure LCIN est un parallélogramme, et donc que LC est parallèle à IN, c'est-à-dire perpendiculaire à MN. De là, la construction :

Elever en N *à* OA *une perpendiculaire qui coupe en* L *la droite joignant le point de rencontre* T *de la tangente avec* OA *au point de rencontre* N′ *de la normale avec* OB ; *le centre de courbure* C *est le pied de la perpendiculaire abaissée de* L *sur la normale.*

Cas de la parabole.

Pour étendre ces diverses constructions au cas de la parabole, il suffit, laissant fixes le sommet A et le foyer F correspondant, de supposer que le centre O s'éloigne indéfiniment sur AF, par suite aussi A′ et F′.

Dans ce passage à la limite, ainsi qu'il est très facile de le voir, les points K et H de la figure précédente tendent vers une même position symétrique de M par rapport à F. Dès lors les constructions I et VII donnent ce même énoncé : *le centre de courbure est sur la perpendiculaire élevée au rayon vecteur par le symétrique du point* M *par rapport au foyer* F. C'est la construction classique.

Les points I et R′ viennent aussi se confondre en un seul à la rencontre du diamètre (parallèle à l'axe) mené par M et de la perpendiculaire à la normale menée par N, et on a la construction : *prendre le point de rencontre* I *de la parallèle à l'axe par* M *et de la parallèle à la tangente par* N ; *la perpendiculaire abaissée de* I *sur l'axe passe par le centre de courbure.*

Les deux tracés précédents sont, au reste, symétriques par rapport à la normale.

Les constructions III et VIII donnent celles-ci, immédiatement réductibles l'une à l'autre : *si la perpendiculaire à la tangente* MT *menée par le point* T *où elle rencontre l'axe est coupée par les perpendiculaires abaissées sur l'axe, de* M *et de* N, *aux points* S *et* L, *la parallèle à l'axe menée par* S *et la parallèle à la tangente menée par* N *passent par le centre de courbure.*

Quant aux constructions IV et V, elles deviennent ici illusoires.

Constructions spéciales soit à l'ellipse, soit à l'hyperbole.

Toutes les constructions ci-dessus s'appliquent indifféremment, nous l'avons dit, à l'ellipse et à l'hyperbole. Mais il existe certaines constructions qui ne peuvent être utilisées que pour l'une ou pour l'autre de ces courbes, parce que certains éléments y intervenant deviennent imaginaires pour la courbe du genre opposé.

Nous nous bornerons à deux exemples empruntés à notre propre fonds, et dont le lecteur pourra s'exercer à trouver des démonstrations géométriques directes. Pour l'ellipse d'abord (*Nouv. Ann.*, 1880, p. 268) :

Si la perpendiculaire menée par M *au grand axe coupe en* M_1 *et* M_2 *le cercle décrit sur ce grand axe comme diamètre, la droite joignant le centre* O *au centre de courbure* C *est conjuguée harmonique du diamètre conjugué de* OM *par rapport à* OM_1 *et* OM_2.

Dans le cas de l'hyperbole, les points M_1 et M_2 deviennent imaginaires et la construction ne s'applique plus.

Par contre toute construction du centre de courbure de l'hyperbole où interviennent les asymptotes est inutilisable dans le cas de l'ellipse, celle-ci, par exemple (*Nouv. Ann.*, 1902, p. 232) :

Si le centre O *se projette en* n *sur la normale et si la tangente rencontre l'une des asymptotes en* t, *la perpendiculaire élevée en* t *à* nt *passe par le centre de courbure.*