Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 17 (1915)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DÉMONSTRATION DIRECTE DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

Autor: Gonggryp, B.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16319

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

DÉMONSTRATION DIRECTE DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

PAR

B. GONGGRYP (Amsterdam).

La théorie des équations algébriques présente, à mon avis, une certaine lacune quant à la démonstration du théorème principal : que toute équation d'un degré quelconque (à coefficients réels) possède une racine. En étudiant ce chapitre (c'est-à-dire la théorie des équations algébriques) de l'analyse, il faut d'abord admettre la vérité du théorème, et même, après avoir acquis une notion plus ou moins complète de la nature et des propriétés des équations et de leurs racines, il faut encore recourir à des moyens qui ne touchent la théorie des équations elles-mêmes qu'indirectement, par exemple à la représentation graphique des fonctions de quantités complexes, etc. C'est pour cette raison que les démonstrations données jusqu'à présent ne me semblent pas tout à fait de nature à porter immédiatement la conviction dans l'esprit, et que j'ose demander au lecteur un moment d'attention pour les deux démonstrations suivantes, directes, inductives, toutes deux assez simples, et dont surtout la seconde, par sa simplicité, me semble mériter d'être admise dans un Cours élémentaire d'algèbre supérieure.

I

En considérant qu'il est d'une extrême facilité de démontrer qu'une équation algébrique d'un degré impair (ayant des

coefficients réels) a toujours une racine, laquelle est en outre réelle, il est clair que l'on aura démontré le thèorème dans toute sa généralité du moment où l'on aura su ramener la démonstration pour une équation d'un degré *pair* à celle pour une équation dont le degré est un nombre *impair*. C'est ce que j'ai tâché de faire dans les pages suivantes.

Rien de plus naturel, l'existence des racines de l'équation quadratique étant sûre, que de chercher à comparer aux racines de cette équation paire, fort spéciale, celle de l'équation du $2n^{\text{ième}}$ degré. Or, pour cela on peut se demander s'il est possible de satisfaire à l'équation :

$$x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + A_2 x^{2n-2} + \ldots + A_{2n-1} x + A_{2n} = 0 \qquad (1)$$

par les racines de l'équation quadratique

$$x^2 - px - q = 0 \ ,$$

ou, ce qui revient au même, de démontrer qu'une expression $x^2 - px - q$ peut être un facteur du premier membre de (1).

Posons donc :

$$F(x) \equiv x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + A_2 x^{2n-2} + \ldots + A_{2n-1} x + A_{2n}$$
$$= (x^2 - px - q)(x^{2n-2} + a_1 x^{2n-3} + a_2 x^{2n-4} + \ldots + a_{2n-3} x + a_{2n-2}) \ .$$

Au premier coup d'œil, il est évident que cette supposition peut être admise à la condition qu'il soit possible de satisfaire au système d'équations :

$$\left.\begin{array}{l}
a_1 - p = A_1 \\
a_2 - a_1 p - q = A_2 \\
a_3 - a_2 p - a_1 q = A_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{2n-2} - a_{2n-3} p - a_{2n-4} q = A_{2n-2} \\
- a_{2n-2} p - a_{2n-3} q = A_{2n-1} \\
- a_{2n-2} q = A_{2n}
\end{array}\right\} \text{ou bien } (A)\ldots \left\{\begin{array}{l}
a_1 = p + A_1 \\
a_2 = a_1 p + A_2 + q \\
a_3 = a_2 p + A_3 + a_1 q \\
a_4 = a_3 p + A_4 + a_2 q \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{2n-2} = a_{2n-3} p + A_{2n-2} + a_{2n-4} q \\
a_{2n-2} p + a_{2n-3} q + A_{2n-1} = 0 \\
a_{2n-2} q + A_{2n} = 0 \ .
\end{array}\right.$$

Or on voit que ce système conduit à exprimer successivement toutes les inconnues a_1, a_2, etc. en p, q et les quantités données A_1, $A_2 \ldots A_{2n}$, de telle sorte qu'à la fin on ait deux équations distinctes en p et en q ; et s'il paraît possible de satisfaire à ces deux dernières, tout le système (A) devra être admis, et par conséquent l'existence du facteur $x^2 - px - q$, et enfin celle de *deux racines* de l'équation proposée sera démontrée.

Les expressions consécutives, qu'on obtient pour a_1, a_2, etc., ont un degré, quant à p et q, qu'on trouve dans la table suivante :

degré de	a_1	a_2	a_3	a_4	. . .	a_{2n-3}	a_{2n-2} ,
en p	1	2	3	4	. . .	$2n-3$	$2n-2$,
en q	0	1	1	2	. . .	$n-1$	$n-1$.

Les deux dernières équations du système (A) seront donc en q du $n-1^{\text{ième}}$ et du $n^{\text{ième}}$ degré respectivement.

On peut les représenter par :

$$P_1 q^{n-1} + P_3 q^{n-2} + \ldots + P_{2n-3} q + P_{2n-1} = 0 , \qquad (2)$$

$$P_0 q^n + P_2 q^{n-1} + \ldots + P_{2n-2} q + P_{2n} = 0 . \qquad (3)$$

(P_h est un polynome en p du $h^{\text{ième}}$ degré.)

Comme on sait, l'élimination de q entre ces équations peut s'effectuer à l'aide d'une simple application de la théorie des déterminants (méthode de Sylvester).

L'équation résultante en p sera :

$$\begin{vmatrix}
P_1 & P_3 & \ldots & \ldots & P_{2n-1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & P_1 & P_3 & \ldots & \ldots & P_{2n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & P_1 & P_3 & \ldots & \ldots & P_{2n-1} & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & P_{2n-1} \\
P_0 & P_2 & P_4 & \ldots & \ldots & P_{2n} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & P_0 & P_2 & P_4 & \ldots & \ldots & P_{2n} & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & P_0 & P_2 & P_4 & \ldots & \ldots & P_{2n} & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & P_{2n}
\end{vmatrix} = 0.$$

Celle-ci représente la condition à laquelle on peut satisfaire aux équations (2) et (3) par la même valeur de q, c'est-à-dire précisément la condition de laquelle dépend la vérité du système (A) et par conséquent l'existence de deux racines de l'équation proposée.

Or, quant à cette équation finale en p, nous n'avons besoin que du *degré*. Pour déterminer celui-ci il faut seulement considérer que pour l'élimination (2) a donné n équations et que (3) en a procuré $n - 1$, de sorte que la diagonale du déterminant, se composant de n facteurs P_1 et de $n - 1$ facteurs P_{2n}, sera une expression, fonction de p, du degré :

$$2n(n-1) + n = n(2n-1) .$$

Aucun autre terme du déterminant ne peut surpasser le degré de cette diagonale, et une simple vérification fera sauter aux yeux qu'ils ont tous le même degré ; par exemple $P_0^{n-1} P_{2n-1}^n$ a pour degré $n(2n-1)$.

Or, ce nombre $n(2n-1)$ est *impair*, si n possède cette propriété, c'est-à-dire si le degré $2n$ de l'équation proposée est un nombre pair, ne possédant qu'*un seul* facteur 2. Alors il est clair qu'il y aura une racine *réelle* de p satisfaisant à la condition représentée par le déterminant ; qu'ensuite les deux équations (2) et (3) donneront une valeur (réelle également) de q ; qu'en allant plus loin le système (A) peut se vérifier, et qu'enfin l'équation proposée possède actuellement les deux racines de l'équation quadratique : $x^2 - px - q = 0$.

Si le degré de l'équation (1) est un nombre pair, se composant de plus d'un facteur 2, l'expression $n(2n-1)$ sera encore un nombre pair ; *mais cependant ce nombre aura un facteur* 2 *de moins*. Ceci montre que la question de savoir si une équation d'un degré pair se composant de h facteurs 2 a une racine peut se réduire par notre procédé à la même question pour une équation dont le degré ne se compose que de $h - 1$ facteurs 2. Et comme nous avons démontré qu'une équation d'un degré, ayant un seul facteur 2, possède actuellement une racine, le théorème est démontré dans toute sa généralité.

II

Tàchons de démontrer qu'à l'équation :

$$F(x) \equiv x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + A_2 x^{2n-2} + \ldots + A_{2n-1} x + A_{2n} = 0$$

peut satisfaire une valeur de x comme : $x = u + iv$.

On sait que :

$$F(u + iv) = F(u) + ivF^{I}(u) - \frac{v^2}{1.2} F^{II}(u) - i \frac{v^3}{1.2.3} F^{III}(u) \ldots$$

$$+ \frac{(iv)^{2n}}{1 \ldots 2n} F^{[2n]}_{(u)} .$$

Cette équation $F(u + iv) = 0$ pourra se vérifier, si simultanément :

$$F(u) - \frac{v^2}{1.2} F^{II}(u) + \frac{v^4}{1.2.3.4} F^{IV}(u) - \frac{v^6}{1 \ldots 6} F^{VI}(u) \ldots$$

$$\pm \frac{v^{2n}}{1 \ldots 2n} F^{[2n]}_{(u)} = 0 \qquad (4)$$

et

$$F^{I}(u) - \frac{v^2}{1.2.3} F^{III}(u) + \frac{v^4}{1 \ldots 5} F^{V}(u) - \frac{v^6}{1 \ldots 7} F^{VII}(u) \ldots$$

$$\mp \frac{v^{2n-2}}{1 \ldots (2n-1)} F^{[2n-1]}_{(u)} = 0 . \qquad (5)$$

Les premiers membres de ces deux équations sont des fonctions de v^2 ; s'il y a une valeur $v = v_1$, satisfaisant aux conditions exposées ci-dessus, il y aura de même une valeur $v = -v_1$; d'où il s'ensuit qu'une équation du $2n^{\text{ième}}$ degré ayant une racine $x = u + iv$, en possède aussi une autre : $x = u - iv$.

En posant : $v^2 = v'$, (4) et (5) deviennent :

$$U_0 v'^n + U_2 v'^{n-1} + U_4 v'^{n-2} + \ldots + U_{2n-2} v' + U_{2n} = 0 \qquad (4a)$$

et

$$U_1 v'^{n-1} + U_3 v'^{n-2} + U_5 v'^{n-3} + \ldots + U_{2n-3} v' + U_{2n-1} = 0 . \qquad (5a)$$

(On voit que U_h est une fonction du $h^{\text{ième}}$ degré par rapport

à u.) De l'élimination de v' entre (4_a) et (5_a) il résulte une équation en u représentée par le déterminant qui se trouve ci-dessous. Quant au degré de cette équation-ci, c'est celui d'un terme quelconque, par exemple, celui de la diagonale : $U_1^n U_{2n}^{n-1}$; c'est-à-dire :

$$n + 2n(n-1) = n(2n-1) .$$

Donc, encore une fois, si le degré de l'équation proposée ne contient qu'un seul facteur 2, celui de l'équation finale sera *impair*, d'où suit une valeur *réelle* de u ; ensuite (4_a) et (5_a) donneront une valeur réelle de v', c'est-à-dire de v^2 ; la réalité de v dépendra encore du signe de cette valeur de v^2, mais n'a rien à faire avec la conclusion qu'il est permis de tirer de ces faits : qu'il y a actuellement des valeurs de u et de v, de sorte que $u + iv$ représente une racine de $F(x) = 0$.

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_3 & \cdots & U_{2n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & U_1 & U_3 & \cdots & U_{2n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & U_1 & U_3 & \cdots & U_{2n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & U_{2n-1} \\ U_0 & U_2 & U_4 & \cdots & U_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & U_0 & U_2 & \cdots & \cdots & U_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & U_0 & U_2 & \cdots & \cdots & U_{2n} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & U_{2n} \end{vmatrix} = 0 .$$

Ensuite, si dans le nombre $2n$ il existe plus d'un facteur 2, on peut appliquer le même procédé à l'équation résultante en u, en posant :

$$u = u_1 + iv_1 .$$

L'équation résultante en u aura alors dans son degré *deux facteurs* 2 *de moins* que l'équation proposée. Posant pour aller plus loin $u_1 = u_2 + iv_2$, etc., on obtiendra enfin une résultante par exemple en u_p, dont le degré est un nombre *impair*, laquelle aura donc une racine réelle.

Alors nous aurons posé successivement :

$$x = u + iv \ ,$$
$$u = u_1 + iv_1 \ ,$$
$$u_1 = u_2 + iv_2 \ ,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{p-1} = u_p + iv_p \ ;$$

d'où

$$x = u_p + i(v + v_1 + \dots v_p) = u_p + iV \ ,$$

en sachant qu'il existe actuellement une valeur réelle de u_p. Or, dans ce cas, nous avons vu ci-dessus qu'il y a aussi une valeur réelle pour V^2 et par conséquent une valeur ou réelle ou imaginaire de V, satisfaisant aux conditions nécessaires; en d'autres termes :

Une équation du $2n^{\text{ième}}$ *degré possède en tout cas une racine, soit réelle, soit complexe.*

Vérification et application des résultats obtenus.

Prenons pour exemple l'équation du quatrième degré :

$$x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4 = 0 \ .$$

1° Nous pouvons supposer que le premier membre est égal au produit :

$$(x^2 - px - q)(x^2 + a_1x + a_2) \ .$$

D'après les formules du système (A) on obtiendra :

$$(2p + A_1)q + p^3 + A_1p^2 + A_2p + A_3 = 0$$

et

$$q^2 + (3p^2 + 2A_1p + A_2)q + p^4 + A_1p^3 + A_2p^2 + A_3p + A_4 = 0 \ .$$

L'élimination de q conduit à l'équation du sixième degré :

$$(2p + A_1)^2(p^4 + A_1p^3 + A_2p^2 + A_3p + A_4) + (p^3 + A_1p^2 + A_2p + A_3)^2$$
$$- (p^3 + A_1p^2 + A_2p + A_3)(3p^2 + 2A_1p + A_2)(2p + A_1) = 0 \ . \qquad (6)$$

L'expression $n(2n - 1)$ se vérifie donc, car : $2(4 - 1) = 6$.

Ensuite, en supposant $A_1 = 0$, l'équation (6) se réduit à :

$$p^6 + 2A_2p^4 + (A_2^2 - 4A_4)p^2 - A_3^2 = 0 \ . \qquad (7)$$

c'est-à-dire précisément à l'équation auxiliaire de la méthode de *Descartes,* à quoi il fallait s'attendre.

2° On peut poser :

$$x = u + iv \ .$$

D'après les formules (4) et (5) les inconnues u et v seront données par :

$$u^4 + A_1 u^3 + A_2 u^2 + A_3 u + A_4 - v^2(6u^2 + 3A_1 u + A_2) + v^4 = 0$$

et

$$4u^3 + 3A_1 u^2 + 2A_2 u + A_3 - v^2(4u + A_1) = 0 \ .$$

L'élimination de v^2 conduit à l'équation du sixième degré :

$$(4u + A_1)^2 (u^4 + A_1 u^3 + A_2 u^2 + A_3 u + A_4) + (4u^3 + 3A_1 u^2 + 2A_2 u + A_3)^2$$
$$- (4u^3 + 3A_1 u^2 + 2A_2 u + A_3)(6u^2 + 3A_1 u + A_2)(4u + A_1) = 0 \ .$$

Dans le cas où $A_1 = 0$, cette équation devient :

$$u^6 + \frac{A_2}{2} u^4 + \frac{A_2^2 - 4A_4}{16} u^2 - \left(\frac{A_3}{8}\right)^2 = 0. \ . \qquad (8)$$

Celle-ci est précisément l'équation auxiliaire de la méthode de résolution d'*Euler*. Les deux équations, le signe du terme connu étant négatif, auront chacune deux racines égales, l'une affectée du signe $+$, l'autre du signe $-$.

Remarque. Dans la seconde démonstration, on a cherché pour x une valeur $x = u + iv$; or, puisque cette racine est en tout cas accompagnée d'une autre $x = u - iv$, cette recherche revient tout à fait au même que l'investigation d'un facteur quadratique :

$$\{(x - u) - iv\}\{(x - u) + iv\} = x^2 - 2ux + u^2 + v^2 \ .$$

La comparaison de cette expression avec

$$x^2 - px - q \ ,$$

employée dans la première démonstration nous fait conclure a priori que l'équation finale en u aura des racines dont chacune est la moitié d'une racine de l'équation à laquelle p doit satisfaire (première démonstration).

Cette conclusion se vérifie complètement par (7) et (8).

Note sur la formation des équations finales de la première démonstration.

Nous nous servirons de la *notation :*

$$F_h(p) = p^h + A_1 p^{h-1} + A_2 p^{h-2} + \dots + A_{h-1} p + A_h \tag{9}$$

donc

$$F_{h+1}(p) = p^{h+1} + A_1 p^h + A_2 p^{h-1} + \dots + A_h p + A_{h+1} ,$$

d'où

$$F_{h+1}(p) = pF_h(p) + A_{h+1} . \tag{10}$$

De (10) on peut déduire :

$$F'_{h+1}(p) = pF'_h(p) + F_h(p) ; \tag{11}$$

de même

$$F'_h(p) = pF'_{h-1}(p) + F_{h-1}(p) . \tag{12}$$

En poursuivant de (12) nous tirons :

$$F''_h(p) = pF''_{h-1}(p) + 2F'_{h-1}(p) ; \tag{13}$$

en général :

$$F_h^{[m]}(p) = pF_{h-1}^{[m]}(p) + mF_{h-1}^{[m-1]}(p) . \tag{14}$$

Maintenant nous pouvons démontrer qu'une inconnue quelconque a_h du système (A) peut être représentée ainsi :

$$a_h = F_h(p) + qF'_{h-1}(p) + \frac{q^2}{1.2} F''_{h-2}(p) + \frac{q^3}{1.2.3} F_{h-3}^{[3]}(p) + \dots$$

$$+ \frac{q^{\frac{h}{2}}}{1 \dots \frac{h}{2}} F_{\frac{h}{2}}^{\frac{[h]}{2}}(p) . \tag{15}$$

Cette formule se rapporte au cas où h est un nombre *pair ;* h étant impair, la puissance la plus élevée de l'inconnue q sera $\frac{h-1}{2}$.

Pour démontrer la formule (15) nous ferons voir qu'elle

est vraie pour a_{h+1}, si elle se vérifie pour a_{h-1}, et pour a_h. A (15) nous ajoutons donc :

$$a_{h-1} = \mathrm{F}_{h-1}(p) + q\mathrm{F}'_{h-2}(p) + \frac{q^2}{1.2}\mathrm{F}''_{h-3}(p) + \frac{q^3}{1.2.3}\mathrm{F}^{[3]}_{h-4}(p) + \dots$$

$$+ \frac{q^{\frac{h-2}{2}}}{1 \dots \frac{h-2}{2}} \mathrm{F}^{\frac{[h-2]}{2}}_{\frac{h}{2}}(p) \,. \qquad (16)$$

Or, d'après le système (A)

$$a_{h+1} = pa_h + qa_{h-1} + \mathrm{A}_{h+1} \,.$$

Donc a_{h+1} se trouve en ajoutant ensemble les expressions suivantes :

$$\mathrm{A}_{h+1} + p\mathrm{F}_h(p) + pq\mathrm{F}'_{h-1}(p) + p\frac{q^2}{1.2}\mathrm{F}^{[2]}_{h-2}(p) + p\frac{q^3}{1.2.3}\mathrm{F}^{[3]}_{h-3}(p) + \dots$$

$$+ p\frac{q^{\frac{h}{2}}}{1.2 \dots \frac{h}{2}} \mathrm{F}^{\left[\frac{h}{2}\right]}_{\frac{h}{2}}(p)$$

$$q\mathrm{F}_{h-1}(p) + q^2\mathrm{F}'_{h-2}(p) + \frac{q^3}{1.2}\mathrm{F}^{[2]}_{h-3}(p) + \dots + \frac{q^{\frac{h}{2}}}{1 \dots \frac{h-2}{2}} \mathrm{F}^{\left[\frac{h-2}{2}\right]}_{\frac{h}{2}}(p) \,.$$

Les termes consécutifs de la formule résultante seront :

$$\mathrm{A}_{h+1} + p\mathrm{F}_h(p) = \mathrm{F}_{h+1}(p) \qquad \text{voir} \quad (10)$$

$$q\left\{p\mathrm{F}'_{h-1}(p) + \mathrm{F}_{h-1}(p)\right\} = q\mathrm{F}'_h(p) \qquad » \quad (12)$$

$$\frac{q^2}{1.2}\left\{p\mathrm{F}^{[2]}_{h-2}(p) + 2\mathrm{F}'_{h-2}(p)\right\} = \frac{q^2}{1.2}\mathrm{F}^{[2]}_{h-1}(p) \qquad » \quad (13)$$

. . . . . .

$$\frac{q^{\frac{h}{2}}}{1.2 \dots \frac{h}{2}}\left\{p\mathrm{F}^{\left[\frac{h}{2}\right]}_{\frac{h}{2}}(p) + \frac{h}{2}\mathrm{F}^{\left[\frac{h}{2}-1\right]}_{\frac{h}{2}}(p)\right\} = \frac{q^{\frac{h}{2}}}{1.2 \dots \frac{h}{2}}\mathrm{F}^{\left[\frac{h}{2}\right]}_{\frac{h}{2}+1}(p) \qquad » \quad (14)$$

Il en résulte :

$$a_{h+1} = F_{h+1}(p) + qF'_h(p) + \frac{q^2}{1.2} F^{[2]}_{h-1}(p) + \frac{q^3}{1.2.3} F^{[3]}_{h-2}(p) \ldots$$

$$+ \frac{q^{\frac{h}{2}}}{1.2 \ldots \frac{h}{2}} F^{\left[\frac{h}{2}\right]}_{\frac{h}{2}+1}(p) ,$$

c'est-à-dire précisément ce qu'il fallait démontrer.

Or, une simple vérification montrant que la formule est juste en posant $h = 1$ et $h = 2$, la vérité en est prouvée pour toute valeur entière de h.

Nous avons donc par exemple :

$$a_{2n-3} = F_{2n-3}(p) + qF'_{2n-4}(p) + \frac{q^2}{1.2} F^{[2]}_{2n-2}(p) + \ldots + \frac{q^{n-2}}{1 \ldots (n-2)} F^{[n-2]}_{n-1}(p) ;$$

$$a_{2n-2} = F_{2n-2}(p) + qF'_{2n-3}(p) + \frac{q^2}{1.2} F^{[2]}_{2n-4}(p) + \ldots + \frac{q^{n-1}}{1 \ldots (n-1)} F^{[n-1]}_{n-1}(p) .$$

De :

$$a_{2n-2}p + a_{2n-3}q + A_{2n-1} = 0 \qquad (\text{ou} \quad a_{2n-1} = 0)$$

il en résulte : (16)

$$F_{2n-1}(p) + qF'_{2n-2}(p) + \frac{q^2}{1.2} F^{[2]}_{2n-3}(p) + \ldots + \frac{q^{n-1}}{1.2 \ldots (n-1)} F^{[n-1]}_{n}(p) = 0 ,$$

tandis que

$$a_{2n-2}q + A_{2n} = 0$$

peut se remplacer par :

$$qF_{2n-2}(p) + \frac{q^2}{1.2} F'_{2n-3}(p) + \frac{q^3}{1.2.3} F^{[2]}_{2n-4}(p) + \ldots$$

$$+ \frac{q^n}{1 \ldots (2n-1)} F^{[n-1]}_{n-1}(p) + A_{2n} = 0 . \qquad (17)$$

Enfin, $p \times (16) + (17)$ nous donne l'équation

$$F_{2n}(p) + qF'_{2n-1}(p) + \frac{q^2}{1.2} F^{[2]}_{2n-2}(p) + \ldots + \frac{q^n}{1.2 \ldots n} F^{[n]}_{n}(p) = 0 , \qquad (18)$$

que l'on peut trouver immédiatement en considérant $a_{2n} = 0$.

Les équations finales sont d'après ce qui précède (16) et (18). Elles donnent directement les équations particulières qui nous ont servi à déduire, dans notre vérification et application, les résolvantes de Descartes et d'Euler.