SUR L'EMPLOI DE CERTAINES MATRICES DE FORMES DANS LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE

Autor(en): **Godeaux, Lucien**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1915)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-16311

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR L'EMPLOI DE CERTAINES MATRICES DE FORMES DANS LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE

PAR

Lucien GODEAUX (Liège).

Des recherches sur certaines congruences de droites m'ont conduit autrefois à la considération de certaines matrices à deux séries de variables cogrédientes

$$\left\| \begin{matrix} a_x^n & a_x^{n-1} a_y & a_x^{n-2} a_y^2 \dots a_y^n \\ b_x^n & b_x^{n-1} b_y & b_x^{n-2} b_y^2 \dots b_y^n \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix} \right\|,$$

à $n+2$ lignes, ne changeant pas de forme lorsque l'on substitue à x_i, y_i des combinaisons $\lambda x_i + \mu y_i$, $\lambda' x_i + \mu' y_i$[1]. M. Stuyvaert a ensuite repris l'étude de ces matrices et d'autres possédant la même propriété, et leur a consacré un Mémoire très intéressant et très suggestif[2]. Certains problèmes de géométrie conduisent à la considération de matrice de même type que celles dont il vient d'être question, mais à trois séries de variables cogrédientes. C'est ce que je me propose de montrer dans ce travail en traitant les problèmes suivants :

a) Déterminer la classe du lieu des plans sur lesquels les quadriques d'un système linéaire ∞^6 découpent ∞^4 coniques.

b) Déterminer la classe du lieu des plans rencontrant sept couples de droites en sept couples de points conjugués par rapport à une même conique.

---

[1] *Sur quelques complexes particuliers.* Bull. Acad. de Belgique, 1907. — *Sur quelques congruences particulières de droites.* Mém. de la Soc. des Sc. du Hainaut, 1908. — *Sur une classe de congruences de droites.* L'Enseign. Math., 1909.

[2] *Sur l'usage des matrices dans l'étude des congruences de droites.* L'enseign. Math , 1910.

§ 1. — *Matrices fonctionnelles.*

1. — Désignons par $(x_0, x_1, x_2, \dots x_r)$, $(y_0, y_1, \dots y_r)$, $(z_0, z_1, \dots z_r)$ les coordonnées projectives homogènes respectivement de trois points X, Y, Z d'un espace linéaire S_r, à r dimensions et représentons par (λ, μ, ν) une fonction rationnelle, entière et homogène par rapport à chacune de ces séries de variables, de degré λ en (x), μ en (y), ν en (z).

Considérons la matrice à sept lignes et six colonnes

$$(1) \qquad \left\| \begin{matrix} (\lambda_1, \mu_1, \nu_1) & (\lambda_2, \mu_2, \nu_2) & \dots & (\lambda_6, \mu_6, \nu_6) \\ (\lambda_1, \mu_1, \nu_1) & — & \dots & — \\ — & — & \dots & — \\ — & — & \dots & — \\ — & — & \dots & — \\ — & — & \dots & — \\ (\lambda_1, \mu_1, \nu_1) & — & \dots & (\lambda_6, \mu_6, \nu_6) \end{matrix} \right\| = 0$$

et supposons que cette matrice ne change pas de forme lorsque l'on substitue à x_i, y_i, z_i, des combinaisons linéaires $\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i$, $\alpha' x_i + \beta' y_i + \gamma' z_i$, $\alpha'' x_i + \beta'' y_i + \gamma'' z_i$. Les équations (1) sont alors vérifiées pour trois points arbitraires (distincts) du plan XYZ. On peut donc dire que ces équations représentent un système de plans. Ce système est de dimensions $3(r-2) - 2 = 3r - 8$; c'est, suivant la terminologie de S. Kantor, un ∞^{3r-8} — complexe de plans.

2. — Faisons $r = 3$. Les équations (1) représentent alors une développable de S_3 dont nous allons rechercher la classe, c'est-à-dire le nombre de ses plans passant par un point. Pour cela, nous pourrions opérer de la manière suivante : Immobilisons le point X et faisons parcourir aux points Y, Z deux droites gauches. Mais alors, nous devrons éliminer les solutions pour lesquelles X, Y, Z sont en ligne droite, ce qui présente de sérieuses difficultés. Il est donc préférable de procéder autrement.

Faisons, dans les équations (1), $r = 4$. Nous avons alors, dans S_4, un ∞^4 — complexe de plans. Par deux points quelconques passent des plans de ce ∞^4 — complexe en nombre fini ξ. De même, il y a un nombre fini ζ de plans de cet ∞^4 — complexe passant par un point et s'appuyant sur deux droites, ces droites et ce point n'etant pas dans un même S_3.

La connaissance des nombres ξ, ζ nous fournit la classe de la développable de S_3. Considérons en effet un point P et deux droites d_1, d_2 de S_4. Lorsque d_1 et d_2 ne se rencontrent pas et que le

point P ne se trouve pas dans le S_3 déterminé par d_1, d_2, faisons varier d_1, d_2 jusqu'à ce que ces droites se rencontrent en un point P'. D'après le principe de la conservation du nombre, le nombre ζ des plans du ∞^4 — complexe passant par P et s'appuyant sur d_1, d_2, restera le même, car il ne devient pas infini[1]. Par conséquent, le nombre ζ est égal au nombre ξ des plans du ∞^4 — complexe passant par P, P' augmenté du nombre χ des plans passant par P et s'appuyant sur d_1, d_2 en des points distincts. Mais d_1, d_2 et P sont actuellement dans un même S_3 et les plans du ∞^4 — complexe passant par P et s'appuyant en des points distincts sur d_1, d_2 ayant trois points communs avec cet S_3 y sont contenus tout entier. Par conséquent, χ est la classe de la développable lieu des plans satisfaisant aux équations (1) pour $r = 4$ et situés dans un S_3. On peut choisir P, d_1, d_2 de manière que cet S_3 soit donné par $x_4 = 0$. On voit ainsi que χ est bien la classe cherchée.

3. — *Calcul de* ξ. — Pour calculer ξ, donnons à X, Y des positions fixes en dehors du plan $x_3 = x_4 = 0$ et faisons parcourir ce plan au point Z. En d'autres termes, dans la matrice (1) donnons aux (x), (y) des valeurs fixes, telles que $x_3, x_4 \neq 0$, $y_3, y_4 \neq 0$ et faisons $z_3 = z_4 = 0$. Nous obtenons une matrice à trois variables homogènes (z_0, z_1, z_2) qui s'annule, d'après une formule de M. Stuyvaert [2], pour

$$\sum_{i,k=1}^{6} \nu_i \nu_k \qquad (i \leq k)$$

systèmes de valeurs de ces variables. On a donc

$$\xi = \sum_{i,k=1}^{6} \nu_i \nu_k \qquad (i \leq k) .$$

Observation. — Les points X, Y, Z jouant des rôles symétriques, on a également

$$\xi = \Sigma \lambda_i \lambda_k , \qquad \xi = \Sigma \mu_i \mu_k \qquad (i \leq k) .$$

Une condition pour que la matrice (1) jouisse de la propriété indiquée est donc

$$\Sigma \lambda_i \lambda_k = \Sigma \mu_i \mu_k = \Sigma \nu_i \nu_k \qquad (i, k = 1, \ldots, 6 ; \quad i \leq k) .$$

4. — *Calcul de* ζ. — Pour calculer ζ, donnons à X une position fixe et faisons parcourir au point Y la droite $y_0 = y_1 = y_2 = 0$,

---

[1] La condition imposée aux plans du ∞^4 — complexes initialement se décompose en deux conditions de même dimension. Voir F. Severi, *Sul principio della conservazione del numero*. Rend. Circ. Palermo, 1912.

[2] *Cinq Etudes de Géométrie Analytique* (p. 10). Gand, Van Gœthem, 1908.

au point Z la droite $z_2 = z_3 = z_4 = 0$. Supposons de plus que le point X ait été choisi de manière que x_2 soit différent de zéro. Alors, les points X, Y, Z sont toujours distincts et ne sont jamais en ligne droite.

Posons

$$\frac{u_1}{u_3} = \frac{y_3}{y_4}, \qquad \frac{u_2}{u_3} = \frac{z_0}{z_1},$$

et substituons dans la matrice (1). Nous obtenons une matrice à trois variables (u_1, u_2, u_3), homogènes, qui admet, d'après la formule de M. Stuyvaert déjà invoquée,

$$\Sigma(\mu_i + \nu_i)(\mu_k + \nu_k) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 6, \quad i \leq k)$$

solutions. Mais parmi ces solutions, il peut y en avoir pour lesquelles on ait soit $u_1 = u_3 = 0$, soit $u_2 = u_3 = 0$. Ces solutions donnent respectivement $y_3 = y_4 = 0$, $z_0 = z_1 = 0$, ce qui est absurde. Remarquons que le $i^{\text{ème}}$ terme d'une ligne est de degré μ_i par rapport aux variables (u_1, u_3). On trouve donc $\xi = \Sigma\mu_i\mu_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots 6, i \leq k)$ solutions pour lesquelles $u_1 = u_3 = 0$. De même, on trouve ξ solutions pour lesquelles $u_2 = u_3 = 0$. Par conséquent, on a

$$\zeta = \Sigma(\mu_i + \nu_i)(\mu_k + \nu_k) - 2\xi \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 6; \quad i \leq k).$$

Par suite

$$\zeta = \Sigma(\mu_i + \nu_i)(\mu_k + \nu_k) - \Sigma\mu_i\mu_k - \Sigma\nu_i\nu_k, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 6; \ i \leq k)$$

$$\zeta = \Sigma\mu_i\nu_k + \Sigma\mu_i\nu_i = \Sigma\mu_i\Sigma\nu_k + \Sigma\mu_i\nu_i. \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 6),$$

5. — *Nombre* χ. — Nous avons trouvé plus haut que la développable représentée par la matrice (1) dans laquelle on a fait $r = 3$, a la classe $\chi = \zeta - \xi$. On a donc

$$\chi = \sum_{i, k=k}^{6} \mu_i\nu_k + \sum_{i=1}^{6} \mu_i\nu_i - \xi.$$

Observation. — Remarquons que pour que la matrice (1) jouisse de la propriété indiquée, on doit arriver au même nombre ζ en intervertissant les rôles des points X, Y, Z. On doit donc avoir

$$\Sigma\mu_i\nu_k + \Sigma\mu_i\nu_i = \Sigma\nu_i\lambda_k + \Sigma\nu_i\lambda_i = \Sigma\lambda_i\mu_k + \Sigma\lambda_i\mu_i.$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, 6).$$

6. — Considérons le déterminant obtenu en supprimant la dernière ligne de la matrice (1) et en y faisant $r = 3$. Ce déterminant,

égalé à zéro, représente une série ∞^2 de plans enveloppant une certaine surface. Pour trouver la classe de cette surface, on immobilise X, Y et on fait $z_2 = z_3 = 0$. On trouve alors que cette classe est égale à $\sum_1^6 \nu_i$. On doit d'ailleurs avoir

$$\Sigma\lambda_i = \Sigma\mu_i = \Sigma\nu_i \ .$$

§ 2. — *Lieu des plans sur lesquels les quadriques d'un système ∞^6, linéaire, découpent ∞^4 coniques.*

7. — Considérons, dans un S_3, sept quadriques linéairement indépendantes dont nous écrirons les équations sous la forme symbolique

$$a_x^2 = 0 \ , \quad b_x^2 = 0 \ , \quad c_x^2 = 0 \ , \quad d_x^2 = 0 \ , \quad f_x^2 = 0 \ , \quad g_x^2 = 0 \ , \quad h_x^2 = 0 \ .$$

Supposons que ces quadriques n'aient, six à six, aucun point commun.

Un plan déterminé par trois points X, Y, Z rencontre une de ces quadriques, la première par exemple, en une conique dont le point générique, de coordonnées $\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0, \ldots \alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma z_3)$, vérifie l'équation

$$\alpha^2 a_x^2 + \beta^2 a_y^2 + \gamma^2 a_z^2 + 2\alpha\beta a_x a_y + 2\beta\gamma a_y a_z + 2\gamma\alpha a_z a_x = 0 \ .$$

Pour que les sept coniques déterminées par les sept quadriques données appartiennent à un même système ∞^4, linéaire, on doit avoir

$$\left\| \begin{matrix} a_x^2 & a_y^2 & a_z^2 & a_x a_y & a_y a_z & a_z a_x \\ b_x^2 & b_y^2 & b_z^2 & b_x b_y & b_y b_z & b_z b_x \\ c_x^2 & — & — & — & — & — \\ d_x^2 & — & — & — & — & — \\ f_x^2 & — & — & — & — & — \\ g_x^2 & — & — & — & — & — \\ h_x^2 & — & — & — & — & h_z h_x \end{matrix} \right\| = 0 \ . \qquad (2)$$

Ces plans enveloppent donc une développable dont la classe χ est donnée par les formules générales du § 1. Dans ces formules, nous devons faire $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 1$, $\lambda_5 = 0$, $\lambda_6 = 1$,

$\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 0$, $\mu_4 = 1$, $\mu_5 = 1$, $\mu_6 = 0$, $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = 0$, $\nu_3 = 2$, $\nu_4 = 0$, $\nu_5 = 1$, $\nu_6 = 1$. On trouve

$$\xi = 11 \ , \qquad \zeta = 17 \ , \qquad \chi = 6 \ .$$

Les plans sur lesquels les quadriques d'un système linéaire ∞^6 découpent ∞^4 coniques, enveloppent une développable de classe six.

Remarquons que par une conique découpée sur un plan tangent à la développable considérée par une quadrique du système donné passent ∞^2 quadriques de ce système. Parmi celles-ci, il y en a ∞^1 contenant le plan, donc :

Le lieu des plans faisant partie de ∞^1 quadriques d'un système linéaire ∞^6, est une développable de classe six.

8. — Le déterminant obtenu en supprimant une ligne dans la matrice (2) et égalé à zéro exprime que six quadriques découpent, sur le plan X, Y, Z, six coniques d'un système (linéaire) ∞^4. D'après ce que nous avons vu (§ 1, n° 6).

Les plans sur lesquels les quadriques d'un système linéaire ∞^5 découpent ∞^4 coniques, enveloppent une surface de classe quatre.

Par une de ces ∞^4 coniques passent ∞^1 quadriques du système, donc le plan appartient à une de ces quadriques.

Les plans appartenant à des quadriques d'un système linéaire ∞^5 enveloppent une surface de quatrième classe.

Les surfaces représentées par deux déterminants d'ordre six tirés de la matrice (2) ont en commun une développable de classe seize se décomposant en la développable considérée plus haut et en une autre, représentée par la matrice (2), où l'on a supprimé deux lignes. C'est le lieu des plans sur lesquels les quadriques d'un système ∞^4 découpent ∞^3 coniques. Ou encore, c'est le lieu des plans appartenant à des quadriques d'un système linéaire ∞^4. Cette développable est de classe 10.

§ 3. — *Lieu des plans rencontrant sept couples de droites en sept couples de points conjugués par rapport à une même conique.*

9. — Soient d_1, d'_1 ; d_2, d'_2 ; ... ; d_7, d'_7 sept couples de droites ne se rencontrant pas deux à deux. Ecrivons les équations des droites d_i, d'_i formant le i — ième couple sous la forme symbolique

$$ai_x \equiv ai_0 x_0 + ai_1 x_1 + ai_2 x_2 + ai_3 x_3 = 0 \ ,$$

$$bi_x \equiv bi_0 x_0 + bi_1 x_1 + bi_2 x_2 + bi_3 x_3 = 0 \ ,$$

pour d_i,

$$a'i_x = 0 \ , \qquad b'i_x = 0$$

pour d'_i.

Un point du plan déterminé par les trois points (non situés en ligne droite) X, Y, Z a pour coordonnées

$$\alpha x_k + \beta y_k + \gamma z_k \,. \qquad (k = 0, 1, 2, 3)$$

Si ce point est situé sur la droite d_i, on a

$$\alpha a i_x + \beta a i_y + \gamma a i_z = 0 \,,$$
$$\alpha b i_x + \beta b i_y + \gamma b i_z = 0 \,.$$

Désignons par α_i β_i, γ_i les paramètres déterminant ce point; on a

$$\alpha_i : \beta_i : \gamma_i = \begin{vmatrix} a i_y & a i_z \\ b i_y & b i_z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a i_z & a i_x \\ b i_z & b i_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a i_x & a i_y \\ b i_x & b i_y \end{vmatrix} .$$

De même, les paramètres α_i', β_i', γ_i' fixant la position du point du plan XYZ se trouvant sur d_i', sont

$$\alpha_i' : \beta_i' : \gamma_i' = \begin{vmatrix} a' i_y & a' i_z \\ b' i_y & b' i_z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a' i_z & a' i_x \\ b' i_z & b' i_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a' i_x & a' i_y \\ b' i_x & b' i_y \end{vmatrix} .$$

Si les points de rencontre du plan XYZ sont conjugués par rapport à une conique de ce plan, il existe une relation bilinéaire entre les quantités α_i, β_i, γ_i; α_i', β_i', γ_i'. Soit

$$\varepsilon_{11}\alpha_i\alpha_i' + \varepsilon_{22}\beta_i\beta_i' + \varepsilon_{33}\gamma_i\gamma_i' + 2\varepsilon_{12}(\alpha_i\beta_i' + \alpha_i'\beta_i)$$
$$+ 2\varepsilon_{23}(\beta_i\gamma_i' + \beta_i'\gamma_i) + 2\varepsilon_{31}(\gamma_i\alpha_i' + \gamma_i\alpha_i) = 0$$

cette relation.

Six couples de points conjugués par rapport à une même conique déterminent cette conique. Par suite, si les sept couples de points d'intersection du plan XYZ avec les sept couples de droites donnés sont conjugués par rapport à une même conique, on doit avoir

$$(3) \qquad \left\| \begin{matrix} \alpha_1\alpha_1' & \beta_1\beta_1' & \gamma_1\gamma_1' & \alpha_1\beta_1' + \alpha_1'\beta_1 & \beta_1\gamma_1' + \beta_1'\gamma_1 & \gamma_1\alpha_1' + \gamma_1'\alpha_1 \\ \alpha_2\alpha_2' & — & — & — & — & — \\ — & — & — & — & — & — \\ — & — & — & — & — & — \\ — & — & — & — & — & — \\ \alpha_7\alpha_7' & — & — & — & — & \gamma_7\alpha_7' + \gamma_7'\alpha_7 \end{matrix} \right\| = 0 \,.$$

Les plans rencontrant sept couples de droites en sept couples de points conjugués par rapport à une même conique engendrent

donc une développable. Les formules trouvées au § 1 permettent de calculer la classe de cette développable. On doit poser $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 1$, $\lambda_5 = 2$, $\lambda_6 = 1$; $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 2$, $\mu_4 = 1$, $\mu_5 = 1$, $\mu_6 = 2$; $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 2$, $\nu_3 = 0$, $\nu_4 = 2$, $\nu_5 = 1$, $\nu_6 = 1$.

On trouve

$$\xi = 39 , \qquad \zeta = 73 , \qquad \chi = 34 .$$

Les plans rencontrant sept couples de droites en des couples de points conjugués par rapport à une même conique, enveloppent une développable de classe 34.

10. — Considérons un déterminant d'ordre six extrait de la matrice (3). Ce déterminant, égalé à zéro, représente le lieu des ∞^2 plans rencontrant six couples de droites en six couples de points conjugués par rapport à une conique. C'est un déterminant du type de ceux que j'ai rencontré dans un travail rédigé lorsque j'étais encore sur les bancs de l'Athénée[1] ; dans ce travail, j'avais, pour atteindre la plus grande généralité possible, considéré le lieu des S_{n-1} rencontrant $n^k - 1$ groupes de k S_{r-n}, dans S_r, en des groupes de k points liés par une relation k — linéaire, et il en était résulté quelques obscurités.

Reprenons notre déterminant d'ordre six, tiré de la matrice (3) et égalé à zéro, et supposons que ce soit précisément celui que l'on obtient en effaçant la septième ligne de cette matrice. Ainsi que nous l'avons observé (§ 1. n° 6), ce déterminant représente une surface-enveloppe de classe huit.

Donnons à X, Y des positions fixes sur la droite d_1 et laissons d'ailleurs Z arbitraire (en dehors de cette droite). On a alors $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$ et par suite, le déterminant est identiquement nul et la surface-enveloppe contient la droite d_1. De même, on vérifie qu'elle contient les droites d_1', d_2, d_2', ..., d_6, d_6'.

11. — Considérons la matrice obtenue en supprimant les deux dernières lignes de la matrice (3). Cette nouvelle matrice, égalé à zéro, représente le lieu des ∞^1 plans rencontrant les cinq couples de droites d_1, d_1': d_2, d_2'; ...; d_5, d_5' en cinq couples de points conjugués par rapport à ∞^1 coniques (d'un faisceau). En reprenant le calcul que nous avons fait au § 1, on trouve que cette développable est de classe 20.

L'intersection des surfaces-enveloppes représentées respectivement par l'évanouissement des déterminants tirés de la matrice (3)

---

[1] *Sur une extension à l'espace d'un théorème de Grassmann.* Nouv. Annales de Math. 1907. — Je profite de cette citation pour rectifier une erreur qui s'est glissée dans un autre travail : *Sur la polarité dans les complexes du second degré (ordre et classe).* (Ens. Math. 1907.) La courbe d'ordre cinq dont il est question au n° 2, page 388, se scinde en cinq droites dont l'une ne rencontre pas d et peut être considérée comme sa correspondante. Cette correspondance serait sans doute intéressante à étudier.

en effaçant soit la dernière, soit l'avant-dernière ligne, est une développable de classe 64. Cette développable se décompose en :

1° la développable de classe 34 lieu des plans rencontrant les sept couples de droites donnés en des couples de points conjugués par rapport à une même conique ;

2° la développable de classe 20 lieu des plans rencontrant les cinq couples de droites d_1, d_1'; ... ; d_5, d_5' en des couples de points conjugués par rapport à ∞^1 coniques ;

3° les faisceaux de plans d'axes d_1, d_1', ..., d_5, d_5'.

Les plans rencontrant six couples de droites en six couples de points conjugués par rapport à une conique, enveloppent une surface de classe huit contenant simplement les douze droites données.

Les plans rencontrant cinq couples de droites en des couples de points conjugués par rapport aux coniques d'un faisceau, enveloppent une développable de classe vingt.

7 juillet 1914.

LE PROBLÈME D'INTERPOLATION ET LA FORMULE DE TAYLOR

PAR

R. SUPPANTSCHITSCH (Vienne).

---

1. — Porté par le désir de ne pas partir dans l'enseignement du théorème de Taylor, d'une formule toute faite qu'on vérifie en calculant l'erreur commise, j'ai abordé dans cette *Revue*[1] en 1901, le problème de tirer immédiatement la formule de Taylor de celle de la moyenne. La méthode que j'ai imaginée dans ce but n'a pas été exacte.

On ne saurait pas, évidemment, surpasser la simplicité de la démonstration usuelle du théorème de Taylor, et cependant le désir subsiste de suggérer préalablement aux élèves la forme des coefficients de cette formule comme le témoignent les essais répétés et quelquefois malaisés d'y arriver au moins pour les trois premiers coefficients. On obtient facilement les deux premiers, mais le troisième exige déjà des raisonnements assez compliqués. Si nous nous bornons à des méthodes qu'on pourrait encore appli-

[1] Sur la démonstration du théorème de Taylor, l'*Enseignement mathématique*, t. 3 (1901), p. 355-357.