Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1916)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPOS D'UNE RÉCRÉATION ARITHMÉTIQUE
Autor: d' Ocagne, M.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16870

A PROPOS D'UNE RÉCRÉATION ARITHMÉTIQUE

PAR

M. M. d'OCAGNE (Paris).

Le problème que j'ai en vue est le suivant : *Former et dénombrer toutes les manières possibles de payer une somme de* n *fr. avec* n *pièces de monnaie d'argent.*

J'ai donné naguère[1] une solution de ce problème pris dans sa plus grande généralité, attendu que j'y admettais l'emploi des pièces de 20 ct. ; mais, vu la rareté de celles-ci, on peut se borner à n'envisager que les pièces de 5 fr., 2 fr., 1 fr. et 50 ct.

Le problème ainsi restreint peut être traité de la façon beaucoup plus simple que voici :

Si x, y, z et t sont les nombres respectifs de ces diverses sortes de pièces intervenant dans le paiement, les équations auxquelles il s'agit de satisfaire en nombres entiers sont :

$$x + y + z + t = n ,$$

$$5x + 2y + z + \frac{t}{2} = n ,$$

d'où par soustraction on déduit immédiatement

$$8x + 2y = t ,$$

et, par suite,

$$z = n - 3(3x + y) .$$

On doit donc avoir

$$3(3x + y) \leqq n$$

d'où

$$y \leqq \frac{n}{3} - 3x$$

---

[1] *Bull. de la Soc. Math. de France*, 1900, p. 157

égalité qui exige elle-même que

$$x \leqq \frac{n}{9} .$$

Divisons dès lors n par 9, et soit q le quotient entier obtenu ; puis, divisons encore le reste de cette première division par 3, et soit q', le nouveau quotient entier obtenu, r' le reste. On pourra dès lors écrire

$$n = 9q + 3q' + r' ,$$

et l'on voit que la formation de toutes les solutions possibles tient dans l'énoncé suivant :

A chacune des valeurs entières de x *telles que* x $\leqq$ q, savoir 0, 1, 2, ..., q — 1, q, *on fait correspondre toutes les valeurs entières de* y *telles que* y $\leqq$ 3q + q' — 3x, *autrement dit :*

$$\begin{array}{lll}
\text{à} & x = 0 , & y = 0 , 1 , 2 , \ldots , 3q + q' , \\
\text{à} & x = 1 , & y = 0 , 1 , 2 , \ldots , 3(q - 1) + q' , \\
. & . . . . & . . . . \\
\text{à} & x = q , & y = 0 , 1 , 2 , \ldots , q' .
\end{array}$$

Enfin, à chaque couple de valeurs de x *et* y *ainsi formé, on joint les valeurs de* z *et* t *données par*

$$z = n - 3(3x + y) , \qquad t = 8x + 2y .$$

Le dénombrement des solutions revient donc à celui des couples de valeurs de x et y ci-dessus définis. Or, les nombres de ces couples figurant dans chacune des $q + 1$ lignes du tableau ci-dessus sont respectivement

$$\begin{gathered}
3q + q' + 1 , \\
3(q - 1) + q' + 1 , \\
. . . . \\
q' + 1 .
\end{gathered}$$

Leur somme est donnée par

$$\begin{aligned}
N &= 3[q + (q - 1) + \ldots + 1] + (q + 1)(q' + 1) \\
&= \frac{3q(q + 1)}{2} + (q + 1)(q' + 1) \\
&= \frac{(q + 1)(3q + 2q' + 2)}{2} .
\end{aligned}$$

Tel est le nombre des solutions cherchées.

Par exemple, pour $n = 100$, on a $q = 11$, $q' = 0$, et, par suite, $N = \frac{12 \times 35}{2} = 210$. Il y a donc 210 manières de payer une somme de 100 fr. avec 100 pièces de monnaies d'argent prises parmi celles de 5 fr., 2 fr., 1 fr. et 50 ct.

Prenons un autre exemple pour montrer le tableau complet de toutes les solutions ; soit $n = 20$; alors $q = 2$, $q' = 0$ et $N = 12$. Les solutions formées d'après le procédé susindiqué sont les suivantes :

x	y	z	t
0	0	20	0
0	1	17	2
0	2	14	4
0	3	11	6
0	4	8	8
0	5	5	10
0	6	2	12
1	0	11	8
1	1	8	10
1	2	5	12
1	3	2	14
2	0	2	16

On pourrait, parmi ces solutions, distinguer celles où interviennent les quatre espèces de pièces de monnaie d'argent et qui, pour cette raison, pourraient être dites des solutions *complètes*. Ce sont ici les trois seules précédant la dernière.

Le premier exemple de solution complète s'offre pour $n = 13$; il se compose de $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $t = 10$.

Le dénombrement des solutions complètes constituerait un nouveau problème que je dédie aux amateurs d'arithmologie.