Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1916)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE

Autor: Turrière, Emile

Kapitel: Application des équations de Brahmagupta-Fermat à l'extraction approchée des racines carrées.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16887

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

les conditions, au nombre de deux, d'existence d'un orthocentre, sont :

$$a^2 + \alpha^2 = b^2 + \beta^2 = c^2 + \gamma^2 .$$

Conformément à la théorie de l'arithmocercle, il suffira de se donner quatre nombres rationnels a, α, $\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{\mu}{2}$, et de poser :

$$b = a \cos\lambda + \alpha \sin\lambda , \qquad c = a \cos\mu + \alpha \sin\mu ,$$
$$\beta = - a \sin\lambda + \alpha \cos\lambda , \qquad \gamma = - a \sin\mu + \alpha \cos\mu ,$$

les quatre nombres rationnels a, α, $\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{\mu}{2}$ étant uniquement assujettis aux conditions qui assurent l'existence effective du quadrilatère.

Application des équations de Brahmagupta-Fermat à l'extraction approchée des racines carrées.

32. — Extraction approchée par excès. Je partirai de l'équation considérée par Brahmagupta

$$nx^2 + 1 = y^2 ,$$

n étant le nombre rationnel, positif, non carré dont il s'agit de calculer la racine carrée ; t étant un nombre rationnel arbitraire, la solution générale de cette équation est donnée par les formules de Brahmagupta rappelées au § 23 :

$$x = \frac{2t}{n - t^2} , \qquad y = \frac{n + t^2}{n - t^2} .$$

Dans ces conditions, si t est un nombre rationnel suffisamment voisin de $\sqrt{n}$, x et y sont des nombres très grands ; tout se passe alors comme si l'équation $nx^2 + 1 = y^2$ se réduisait à $nx^2 = y^2$; de sorte que $\frac{y}{x}$ est une valeur approchée de $\sqrt{n}$ (par excès). Cette valeur approchée de $\sqrt{n}$ est

$$\nu_1 = \frac{n + t^2}{2t} ;$$

l'erreur commise est :

$$\varepsilon_1 = \nu_1 - \sqrt{n} \ ;$$

on a donc

$$y = x(\varepsilon_1 + \sqrt{n})$$

et, par suite,

$$1 = x^2(\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1\sqrt{n}) \ ,$$

de sorte que l'expression

$$\frac{1}{2\sqrt{n}\,x^2} \ ,$$

où $\sqrt{n}$ est remplacé par une valeur approchée par défaut, représente une limite supérieure de cette erreur ε_1.

33. — Extraction approchée par défaut. L'équation

$$nx^2 - 1 = y^2$$

n'étant résoluble que lorsque n est une somme de deux carrés, on ne peut songer à l'utiliser pour déterminer une valeur approchée par défaut de $\sqrt{n}$. Pour obtenir celle-ci, il y aura lieu d'avoir recours à une équation résoluble quel que soit n ; par exemple, à l'équation

$$nx^2 - \frac{1}{n} = y^2$$

représentative d'une arithmohyperbole passant par l'arithmopoint $x = \frac{1}{n}$, $y = 0$. La méthode générale de résolution des équations de Bragmagupta-Fermat, à partir d'une solution particulière connue *a priori*, conduit actuellement aux formules suivantes de résolution :

$$x = \frac{n + t^2}{n(n - t^2)} \ , \qquad y = \frac{2t}{n - t^2} \ .$$

Comme dans le paragraphe précédent, t sera une valeur rationnelle approchée de $\sqrt{n}$; le rapport $\frac{y}{x} = \nu_2$, c'est-à-dire

$$\nu_2 = \frac{2nt}{n + t^2} \ ,$$

sera une valeur approchée (par défaut) de la racine carrée

de n. Pour expression de l'erreur ε_2, on pourrait prendre :

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}} x^2} .$$

34. — En résumé, la théorie des équations de Brahmagupta-Fermat conduit à un procédé d'extraction des racines carrées fondé sur les inégalités

$$\frac{2nt}{n + t^2} < \sqrt{n} < \frac{n + t^2}{2t} .$$

Les termes extrêmes ont pour produit n et leur différence est :

$$\frac{n + t^2}{2t} - \frac{2nt}{n + t^2} = \frac{(n - t^2)^2}{2t(n + t^2)} .$$

Cette méthode n'est d'ailleurs pas distincte de celle employée par les géomètres grecs, par Archimède notamment :

Soit, pour fixer les idées, à extraire la racine carrée de $n = 1000$. Ce nombre étant compris entre $\overline{31}^2 = 961$ et $\overline{32}^2 = 1024$, il y aura lieu de prendre $t = 32$, dans une première application des formules précédentes ; on obtient ainsi

$$\frac{8000}{253} = 31{,}620 < \sqrt{1000} < \frac{253}{8} = 31{,}625 ,$$

c'est-à-dire deux décimales exactes dès cette première application.

Une seconde application avec $t = \frac{253}{8}$ donne

$$\frac{4{\cdot}048{\cdot}000}{128{\cdot}009} < \sqrt{1000} < \frac{128{\cdot}009}{408} ,$$

ou encore :

$$31{,}622{\cdot}776{\cdot}3 < \sqrt{1000} < 31{,}622{\cdot}776{\cdot}6 ,$$

c'est-à-dire six décimales exactes.

Une troisième application donne quinze décimales :

$$31{,}622{\cdot}776{\cdot}601{\cdot}683{\cdot}793{\cdot}2 < \sqrt{1000} < 31{,}622{\cdot}776{\cdot}601{\cdot}683{\cdot}793{\cdot}4 .$$