arithmopoints des cubiques.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1916)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

se trouve d'ailleurs une arithmoquadrique gauche représentée paramétriquement par les équations :

$$x = 9t^4 , \qquad y = 1 + 9t^3 , \qquad z = -3t(1 + 3t^3)$$

et qui est tracée sur un paraboloïde hyperbolique d'équation

$$y(z + x) + 2x - z = 0 .$$

Il suffit de considérer les cordes de cette arithmoquadrique définies par deux arithmopoints de paramètres respectifs t_1 et t_2 pour avoir une représentation rationnelle en fonction de deux paramètres t_1 et t_2 de cette surface.

Les arithmopoints des cubiques.

39. — Arithmocubique gauche. La théorie arithmogéométrique des cubiques gauches est absolument identique à celle des coniques dans le plan. Une cubique gauche représentée par des équations à coefficients rationnels n'est pas généralement une arithmocourbe. Mais dès qu'elle possède un arithmopoint particulier, elle est une arithmocubique gauche. L'arithmopoint courant est alors l'intersection de l'arithmocubique avec un arithmoplan (dépendant d'un paramètre rationnel arbitraire) pivotant autour de la tangente à cette courbe en l'arithmopoint connu *a priori*.

Il peut arriver d'ailleurs, à l'occasion de l'étude de cas particuliers, qu'il soit inutile d'avoir recours à la considération de l'arithmoplan général passant par cette tangente particulière. C'est, par exemple, ce qui se produit pour le système suivant de deux équations à trois inconnues :

$$ax + a' = y^2 ,$$
$$bx + b' = z^2 ;$$

a, a', b, b' sont quatre coefficients rationnels absolument quelconques. L'élimination de x entre ces deux équations donne une équation

$$by^2 - az^2 = ba' - ab'$$

du type de celle considérée par Brahmagupta et Fermat. Il

peut se faire que cette dernière n'admette pas de solution : c'est ce qui se produit, par exemple, pour le système :

$$2x + 3 = y^2 ,$$
$$3x + 5 = z^2 ,$$

considéré par FERMAT comme n'admettant pas de solution en nombres entiers ; l'équation obtenue par l'élimination de x est alors

$$2z^2 - 3y^2 = 1 ;$$

si cette dernière équation avait des solutions rationnelles, l'équation

$$2z^2 - 3y^2 = t^2$$

à trois inconnues (y, z, t) aurait des solutions entières ; t et z seraient nécessairement premiers avec 3 ; en posant donc

$$z = 3Z + \varepsilon_1 \qquad t = 3T + \varepsilon_2 \qquad (\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1)$$

on aurait la relation impossible suivante :

$$1 = 3(Y^2 + 3T^2 - 6z^2 - 4\varepsilon_1 z + 2\varepsilon_2 T) .$$

Mais lorsque le système considéré admet une solution particulière, il est certain qu'il en admet une infinité, car l'équation $by^2 - az^2 = ab' - ba'$ est alors attachée à une arithmoconique.

Soit (x_0, y_0, z_0) la solution imposée *a priori*. L'arithmoconique

$$by^2 - az^2 = by_0^2 - az_0^2$$

et l'arithmodroite $z - z_0 = t(y - y_0)$ pivotant autour du point (y_0, z_0), dans le plan Oyz, admettent pour intersection l'arithmopoint courant de l'arithmoconique, représenté par les coordonnées suivantes :

$$y = \frac{(at^2 + b)y_0 - 2atz_0}{at^2 - b} , \qquad z = \frac{-(at^2 + b)z_0 + 2bty_0}{at^2 - b} .$$

D'où se déduit l'expression de x en fonction de t :

$$x = x_0 + 4t . \frac{t(by_0^2 + az_0^2) - (at^2 + b)y_0 z_0}{(at^2 - b)^2} .$$

Il résulte des considérations qui précèdent que le système considéré est généralement impossible. Lorsqu'il admet une solution, il en admet une infinité dépendant d'un paramètre; toute solution rationnelle du système appartient à cet ensemble de solutions. La courbe représentative est alors une arithmocubique gauche.

40. — Cubique plane. L'étude arithmogéométrique d'une cubique plane unicursale n'offre aucune difficulté. L'équation de cette courbe étant rationnelle, les coordonnées du point singulier dont l'existence a pour effet d'annuler le genre de la courbe sont nécessairement rationnelles, si la courbe n'est pas décomposable en une conique et une droite. Cette cubique plane unicursale et non décomposable est donc nécessairement une arithmocubique, susceptible d'être représentée par des équations paramétriques rationnelles.

Je supposerai donc que les cubiques qui seront étudiées dorénavant sont essentiellement des courbes unicursales. Dans aucun cas une telle courbe ne saurait être désignée sous le nom d'arithmocubique; mais elle peut néanmoins posséder une infinité d'arithmopoints. Si, en effet, une cubique plane, représentée en coordonnées cartésiennes par une équation rationnelle, possède un arithmopoint particulier, il est généralement possible de déduire de la connaissance de celui-ci un nouvel arithmopoint; il suffit, à cet effet, d'observer que la tangente à la cubique en l'arithmopoint connu *a priori* rencontre à nouveau la courbe en un second arithmopoint. De ce second point peut se déduire, par application du même procédé, un troisième arithmopoint. De sorte que, dans le cas général, l'existence d'un arithmopoint particulier sur une cubique plane d'équation rationnelle entraîne celle d'une suite d'arithmopoints en nombre infini.

Il n'y a exception que dans les deux cas suivants :

1° Lorsque l'arithmopoint connu de la cubique est un point d'inflexion, il est impossible de déduire de cet arithmopoint inflexionnel un autre arithmopoint par la méthode qui précède. C'est, par exemple, le cas de la cubique représentée par l'équation

$$x^3 + y^3 = 1$$

qui admet trois arithmopoints particuliers alignés et qui ne sont autres que les trois points d'inflexion réels de la courbe : les deux points sur les axes ($x = 0$, $y = 1$) et ($x = 1$, $y = 0$) et le point à l'infini dans la direction $x + y = 0$. La courbe n'admet d'ailleurs aucun autre arithmopoint : c'est en cette négation que consiste précisément le dernier théorème de Fermat, dans le cas des troisièmes puissances.

2° Lorsque l'arithmopoint connu conduit, après l'application plusieurs fois répétée de la méthode tangentielle, à un arithmopoint d'inflexion. Dans ce cas le nombre d'arithmopoints de la cubique est limité. C'est le cas de la cubique représentée par l'équation $x^3 + y^3 = 2$; elle admet évidemment l'arithmopoint $x = 1$, $y = 1$ dont la tangente est parallèle à l'asymptote ; l'arithmopoint ainsi obtenu à partir de (1, 1) n'est donc autre que le point d'inflexion situé à l'infini.

Il y a lieu maintenant d'exposer les calculs dans un certain nombre de cas remarquables, en faisant appel aux notions les plus élémentaires de géométrie analytique et en laissant notamment de côté toute considération de fonctions elliptiques.

41. — Courbes $x^3 + y^3 = a$. C'est à l'étude arithmo-géométrique de ces courbes de Lamé particulières que se ramène l'étude des solutions entières de l'équation $x^3 + y^3 = az^3$ dont l'impossibilité pour $a = 1$ et $a = 2$ a été affirmée par Fermat et pour $a = 3, 4, 5, 6, 8, 16$ par Legendre. Toutefois, pour $a = 6$, l'équation est possible en vertu de l'égalité

$$\overline{17}^3 + \overline{37}^3 = 6 \,.\, \overline{21}^3$$

découverte par Pepin. Cette même équation $x^3 + y^3 = az^3$ a été aussi considérée par Ed. Lucas.

La courbe d'équation $x^3 + y^3 = a$ admettant pour points d'inflexion réels les points ($x = 0$, $y = \sqrt[3]{a}$), ($x = \sqrt[3]{a}$, $y = 0$) et le point à l'infini, il n'y aura pas lieu de se préoccuper de ces points d'inflexion ; les deux premiers ne sont, en effet, des arithmopoints que lorsque a est un cube parfait. D'après le théorème de Fermat, la cubique n'admet alors aucun autre arithmopoint. Il résulte donc des considé-

rations qui précèdent que si l'équation $x^3 + y^3 = a$ admet une solution particulière, elle admet une infinité de solutions.

Soit (x_0, y_0) la solution connue. La tangente à la courbe $x^3 + y^3 = x_0^3 + y_0^3$ en l'arithmopoint (x_0, y_0) a pour équations paramétriques

$$x = x_0 + uy_0^2 ,$$
$$y = y_0 - ux_0^2 ;$$

le paramètre u du point où cette tangente rencontre à nouveau la cubique est ainsi la solution différente de zéro de l'équation

$$(x_0 + uy_0^2)^3 + (y_0 - ux_0^2)^3 = x_0^3 + y_0^3$$

c'est-à-dire :

$$u = \frac{3x_0 y_0}{x_0^3 - y_0^3} ;$$

les coordonnées du point *tangentiel* du point (x_0, y_0) sont ainsi :

$$x_1 = x_0 \cdot \frac{a + y_0^3}{x_0^3 - y_0^3} \qquad y_1 = y_0 \cdot \frac{a + x_0^3}{y_0^3 - x_0^3} .$$

42. — Cubiques $y^2 = x^3 + a$. La tangente au point (x_0, y_0) peut être représentée par les équations paramétriques

$$x = x_0 + 2y_0 u \qquad y = y_0 + 3x_0^2 u$$

le paramètre u du point tangentiel de (x_0, y_0) est

$$u = 3x_0 \cdot \frac{3x_0^3 - 4y_0^2}{8y_0^3} ;$$

les coordonnées de ce point tangentiel sont donc :

$$x_1 = x_0 \cdot \frac{x_0^3 - 8a}{4(x_0^3 + a)} , \qquad y_1 = -\frac{y_0^4 + 18ay_0^2 - 27a^2}{8y_0^3} .$$

Dans le cas où a est le nombre -4, FERMAT a énoncé, sans démonstration, que l'équation correspondante

$$y^2 = x^3 - 4$$

admet deux solutions et deux seulement, $(x_0 = 2,\ y_0 = 2)$ et $(x_1 = 5,\ y_1 = 11)$, en nombres entiers. On observera que la solution (x_1, y_1) n'est autre que celle qui se déduit de (x_0, y_0) par application des formules ci-dessus données. Cette équation a une infinité de solutions rationnelles.

Il en est de même de l'équation $y^2 = x^3 - 2$ (Fermat, Legendre) qui admet la solution $(x = 3,\ y = 5)$ et, par suite, une infinité de solutions rationnelles.

L'équation

$$y^2 = x^3 + 17$$

étudiée par E. CESARO possède les systèmes suivants de solutions :

$$\begin{cases} x = -2, & -1, & 2, & 4, & 8, & 43, & 52 \\ y = 3, & 4, & 5, & 9, & 23, & 282, & 375 \end{cases}$$

qui se déduisent les unes des autres par la méthode du point tangentiel ou par alignements.

(A suivre.)