Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1916)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DES EQUATIONS PRIMITIVES TRINOMES DU SECOND DEGRÉ
Autor: Hansen, H. E.
Kapitel: I. — L'équation $a + x^2 = y^2$.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16871

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

DES ÉQUATIONS PRIMITIVES TRINOMES DU SECOND DEGRÉ

PAR

H. E. HANSEN (Copenhague).

I. — *L'équation* $a + x^2 = y^2$.

p et q désignant des nombres entiers et premiers entre eux, pour p *pair,* q *impair* (ou vice versa), considérons l'identité

$$4pq + (p - q)^2 = (p + q)^2 \tag{I}$$

et pour p et q, *tous les deux impairs,* la suivante

$$pq + \left(\frac{p - q}{2}\right)^2 = \left(\frac{p + q}{2}\right)^2 \tag{II}$$

Ces identités nous fourniront des moyens pour résoudre l'équation donnée.

Si l'on veut employer (I), il faut que a puisse s'écrire $4pq$, où p doit être pair. Ainsi a aura au moins 2^3 comme facteur.

Exemple 1. $a = 4 . 2^\alpha \times$ *un nombre premier impair.*

Les valeurs pour α étant 1, 2, 3 ... , il s'ensuit que dans la formule (I) p sera 2^α et q le nombre premier donné. Ainsi nous n'aurons qu'une seule solution :

$$x = \pm (q - 2^\alpha) \quad \text{et} \quad y = q + 2^\alpha .$$

Exemple 2. $a = 4 . 2^\alpha \times$ *un nombre impair composé.*

Dans la formule (I) p et q seront les deux facteurs, premiers entre eux, de tous les *couples de facteurs* qui peuvent

se former de 2^α et des facteurs premiers du nombre composé donné. Ainsi les facteurs 2^α, k^β et l^γ forment les couples :

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2^\alpha, & k^\beta, & l^\gamma \\ 2^\alpha k^\beta l^\gamma & k^\beta l^\gamma & 2^\alpha l^\gamma & 2^\alpha k^\beta \end{array}$$

c'est-à-dire 2^{3-1} couples en tout.

Si l'on a donné les quatre facteurs, premiers entre eux, 2^α, k, l et m, ils fourniront les couples

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2^\alpha, & k, & l, & m, & 2^\alpha k, & 2^\alpha l, & 2^\alpha m \\ 2^\alpha klm & klm & 2^\alpha lm & 2^\alpha km & 2^\alpha kl & lm & km & kl \end{array}$$

c'est-à-dire 2^{4-1} couples.

Pour n facteurs, on aura 2^{n-1} couples et par suite 2^{n-1} *solutions* de l'équation proposée.

Si l'on veut employer la formule (II), nous procéderons de la même manière.

Exemple 1. $a =$ *un nombre premier impair.*

Pour pq on met le nombre donné, a, et on n'aura que le seul couple de facteurs, a et 1, à poser dans la formule, respectivement pour p et q. Ainsi on n'aura que la seule solution :

$$x = \frac{a-1}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{a+1}{2}.$$

Exemple 2. $a =$ *un nombre impair, composé de* n *facteurs premiers.*

Comme plus haut, les n facteurs forment 2^{n-1} couples de facteurs premiers entre eux, et ainsi on aura 2^{n-1} *solutions.*

Application à des exemples numériques :

L'équation (I) peut s'écrire

$$p + q = \sqrt{(p-q)^2 + 4pq} \quad \text{ou} \quad p - q = \sqrt{(p+q)^2 - 4pq}.$$

et l'équation (II)

$$\frac{p+q}{2} = \sqrt{\left(\frac{p-q}{2}\right)^2 + pq} \quad \text{ou} \quad \frac{p-q}{2} = \sqrt{\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - pq}.$$

Exemple 1. $p + q = \sqrt{z^2 + 4.2.3.5}$.

Les couples de facteurs mentionnés plus haut deviennent :

1 ,	2 ,	3 ,	5 ,
2.3.5	3.5	2.5	2.3

Si l'équation est primitive et en nombres entiers, il faut avoir $z = 29$, 13, 7 ou 1, et les racines correspondantes $p + q$ seront 31, 17, 13 et 11.

Exemple 2. $\frac{p - q}{2} = \sqrt{z^2 - 3.5.7}$.

Les couples de facteurs sont

1 ,	3 ,	5 ,	7 ,
3.5.7	1.5.7	1.3.7	1.3.5

Il faut donc qu'on ait $z = 53$, 19, 13 ou 11, et les racines $\frac{p - q}{2}$ deviendront 52, 16, 8 et 4.

Exemple 3. Soit

$$x = \sqrt{1508^2 + 88305} \ ;$$

pour savoir, sans calcul ordinaire, si la racine est rationnelle, il faut examiner si les deux termes sous le signe radical ont un facteur commun. On trouvera le facteur 29 ; et en outre 88305 étant divisible par 29^2, il s'ensuit

$$x = 29\sqrt{52^2 + 105} \ .$$

Comme 52 est égal à $\frac{105 - 1}{2}$, la racine sera $\frac{105 + 1}{2}$, et ainsi on a

$$x = 29.53 \ .$$

II. — *L'équation* $x + y^2 = a^2$.

A l'aide des équations (I) et (II) on sera à même de déterminer x et y.

Il y aura trois cas différents, selon qu'on a a égal à 1° un nombre premier impair, 2° un nombre impair composé ou 3° un nombre pair composé.