Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1916)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DES EQUATIONS PRIMITIVES TRINOMES DU SECOND DEGRÉ
Autor: Hansen, H. E.
Kapitel: III. — L'équation $x + a^2 = y^2$
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16871

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

D'une manière pareille on peut faire usage de l'équation (II), quand on a déterminé la première moitié des nombres inférieurs à $2a$ et premiers avec celui-ci.

Ainsi on trouvera pour $a = 15$:

Exemple.

$$\begin{aligned} 2a = 30 = \ & 1 + 29 \quad \text{donne} \quad 1.29 + 14^2 = 15^2 \\ & 7 + 23 \qquad\quad 7.23 + 8^2 = 15^2 \\ & 11 + 19 \qquad 11.19 + 4^2 = 15^2 \\ & 13 + 17 \qquad 13.17 + 2^2 = 15^2 . \end{aligned}$$

Le nombre des relations est $\varphi(a) : 2$.

3^e *cas*. — Le nombre donné étant pair, l'équation (I) ne donne aucune équation primitive, et, par conséquent, nous n'aurons *aucune solution*.

Pour avoir des solutions d'après (II), il faut encore connaître la première moitié des nombres inférieurs à $2a$ et premiers avec celui-ci. Soit $a = 12$, $2a = 24 = 2^3.3$, on a $\varphi(24) = 2^2(2 - 1)(3 - 1) = 8$.

Exemple.

$$\begin{aligned} 2a = 24 = \ & 1 + 23 \quad \text{donne} \quad 1.23 + 11^2 = 12^2 \\ & 5 + 19 \qquad\quad 5.29 + 7^2 = 12^2 \\ & 7 + 17 \qquad 7.17 + 5^2 = 12^2 \\ & 11 + 13 \qquad 11.13 + 1^2 = 12^2 . \end{aligned}$$

Le nombre des solutions devient $\varphi(2a) : 2$.

III. — *L'équation* $x + a^2 = y^2$.

Les équations (I) et (II) nous donneront aussi, pour un a donné, des solutions de cette équation. On aura à traiter, comme plus haut, les trois cas différents désignés.

1^{er} *cas*. — En se servant de l'équation (I), il faut écrire le nombre premier donné, a, comme une différence entre deux nombres impairs et premiers entre eux. Mais cela pourra se faire d'innombrables manières. Les nombres de 1 à $a - 1$ sont premiers avec a, et, par conséquent, on peut les poser pour q, comme nombres à soustraire, dans l'équation $a = p - q$, quand pour p on met $a + q$.

Exemple.

$a = 7 = 8 - 1$	donne	$4.1.\ 8 + 7^2 = 9^2$
$9 - 2$		$4.2.\ 9 + 7^2 = 11^2$
$10 - 3$		$4.3.10 + 7^2 = 13^2$
$11 - 4$		$4.4.11 + 7^2 = 15^2$
$12 - 5$		$4.5.12 + 7^2 = 17^2$
$13 - 6$		$4.6.13 + 7^2 = 19^2$.

On peut *continuer à l'infini* en ajoutant des multiples de 7. Ainsi nous aurons :

$15 - 8$	donne	$4\text{-}\ 8\text{-}15 + 7^2 = 23^2$
$16 - 9$		$4\text{-}\ 9\text{-}16 + 7^2 = 25^2$
$17 - 10$		$4\text{-}10\text{-}17 + 7^2 = 27^2$
etc.		etc.

Usant de l'équation (II), il nous faut décomposer a en $\frac{p-q}{2}$, ou $2a$ en $p - q$. Pour $a = 7$, $2a = 14$, on doit donc poser pour q les $\varphi(14)$, ou 6, nombres qui sont inférieurs à 14 et premiers avec ce nombre, savoir 1, 3, 5, 9, 11, 13.

Exemple.

$2a = 14 = 15 - 1$	donne	$1.15 + 7^2 = 8^2$
$17 - 3$		$3.17 + 7^2 = 10^2$
$19 - 5$		$5.19 + 7^2 = 12^2$
$23 - 9$		$9.23 + 7^2 = 16^2$
$25 - 11$		$11.25 + 7^2 = 18^2$
$27 - 13$		$13.27 + 7^2 = 20^2$
$29 - 15$		$15.29 + 7^2 = 22^2$
$31 - 17$		$17.31 + 7^2 = 24^2$
$33 - 19$		$19.33 + 7^2 = 26^2$
etc.		etc.

2^e *cas.* — Quand on a pour a *un nombre composé impair*, on procède comme plus haut; il faut, toutefois, commencer par la détermination des nombres qui se trouvent inférieurs à a et premiers avec celui-ci.

3^e *cas.* — Ayant pour a *un nombre pair*, l'équation (I) ne donnera aucune solution primitive.

Par contre, l'équation (II) nous donnera *d'innombrables solutions*. Pour $a = 18$, nous avons $2a = 36$, et les $\varphi(36)$, ou 12, nombres inférieurs à 36 et premiers avec lui, sont 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, d'où suit :

Exemple.

$2a = 36 = 37 - 1$		donne	$1.37 + 18^2 = 19^2$
	$41 - 5$		$5.41 + 18^2 = 23^2$
	$43 - 7$		$7.43 + 18^2 = 25^2$
	$47 - 11$		$11.47 + 18^2 = 29^2$
	. . . .		. . . . .
	. . . .		. . . . .
	$73 - 37$		$37.73 + 18^2 = 55^2$
	$77 - 41$		$41.77 + 18^2 = 59^2$
	etc.		etc.

IV. — *L'équation* $a^2 + x^2 = y^2$.

(« Equation pythagorique »).

Les nombres pythagoriques se laissent déterminer de la plus simple manière à l'aide des équations (I) et (II), si l'on pose, seulement, pour p et q des nombres carrés correspondants, et en employant, *dans le premier terme,* successivement tous les nombres carrés.

Exemple. $4 . 2^2 . 3^2 . 5^2 = 60^2$ donne les couples de facteurs :

1^2,	2^2,	3^2,	5^2
$2^2 . 3^2 . 5^2$	$3^2 . 5^2$	$2^2 . 5^2$	$2^2 . 3^2$

dont on aura

$$60^2 + 899^2 = 901^2$$
$$60^2 + 221^2 = 229^2$$
$$60^2 + 91^2 = 109^2$$
$$60^2 + 11^2 = 61^2 .$$

On trouve toutes les valeurs cherchées, en employant seulement l'équation (II), où successivement on met dans le premier terme tous les nombres *impairs* de toute la suite des nombres. Si a est un nombre composé, il faut le décomposer en ses facteurs premiers, et de ceux-ci on doit former, comme nous l'avons montré dans ce qui précède, tous les couples des facteurs, p et q, premiers entre eux, qui se peuvent faire.

V. — *L'équation* $x^2 + y^2 = a^2$.

Si cette équation doit être primitive, elle ne peut être satisfaite que par des valeurs impaires de a, et seulement