NOTE SUR UN APPAREIL PROPRE A RÉSOUDRE MÉCANIQUEMENT LES ÉQUATIONS DE FREDHOLM

Autor(en): **Ballif, L.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1916)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-16873

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

NOTE SUR UN APPAREIL PROPRE A RÉSOUDRE MÉCANIQUEMENT LES ÉQUATIONS DE FREDHOLM

PAR

L. Ballif (Aux armées françaises).

L'équation de Fredholm est de la forme :

$$f(x) + \int_a^b \mathrm{F}(x, t)\, \varphi(t)\, dt = \varphi(x) \tag{1}$$

l'inconnue est la fonction φ; les données sont les fonctions $f(x)$ et $\mathrm{F}(x, t)$.

Nous allons essayer de trouver la solution de cette équation en nous basant sur l'incompressibilité des liquides.

Donnons à x une valeur constante $x = x_i$. L'équation (1) devient

$$f(x_i) + \int_a^b \mathrm{F}(x_i, t)\, \varphi(t)\, dt) = \varphi(x_i) \ .$$

Nous pouvons remplacer l'intégrale par sa valeur approximative

$$\frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{j=n} \mathrm{F}(x_i, t_j)\, \varphi(t_j)$$

obtenue en divisant en n parties égales l'intervalle $b - a$, de sorte que

$$t_j = a + j\frac{b-a}{n} \ .$$

On a donc finalement à résoudre le système d'équations

$$f(x_i) + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{b-a}{n} \mathrm{F}(x_i, t_j)\, \varphi(t_j) = \varphi(x_i) \qquad (2)$$

si l'on donne à x les n valeurs

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n} \qquad \text{de} \quad i = 1 \quad \text{à} \quad i = n\,.$$

Si l'on trace dans le plan horizontal deux axes Ox, Ot, et si l'on considère le carré de côtés $x = a$, $x = b$, $t = a$,

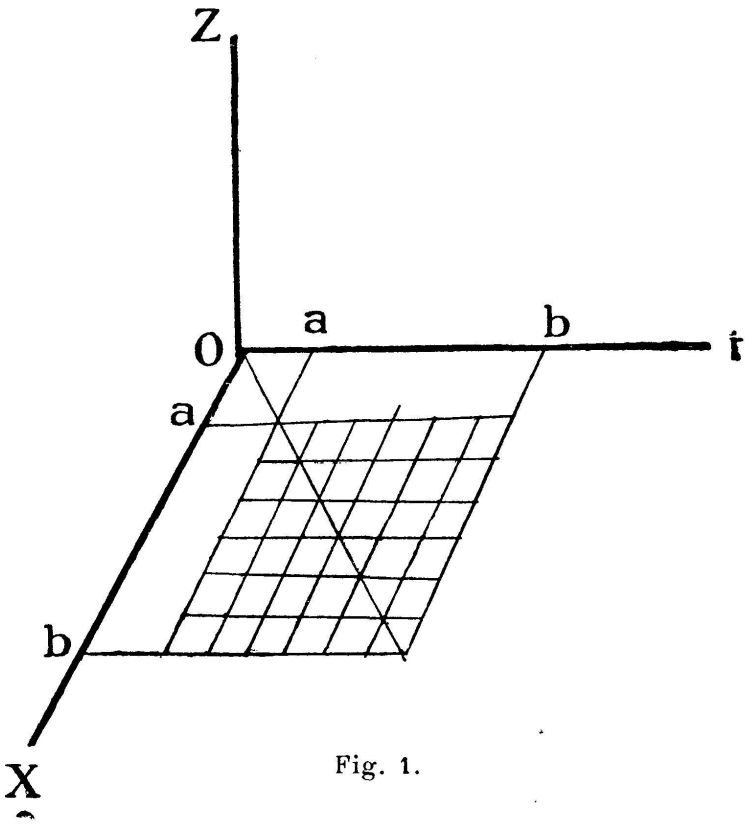

Fig. 1.

$t = b$, cela revient à le décomposer en n^2 carrés de côté $\frac{b-a}{n}$, et à ne considérer parmi les valeurs des fonctions F, φ et f que celles qui correspondent aux sommets de ces carrés.

Ceci posé, reprenons l'équation

$$f(x_i) + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{b-a}{n} \mathrm{F}(x_i, t_j)\, \varphi(t_j) = \varphi(x_i)$$

où nous considérons x_i comme une constante donnée et t_j comme la variable. Pour simplifier l'exposition nous supposerons d'abord que l'on a $f(x_i) = 0$, de sorte que l'équation s'écrira

$$\sum_{j=1}^{j=n} \frac{b-a}{n} F(x_i, t_j)\, \varphi(t_j) = \varphi(x_i) .$$

Considérons alors une cavité pleine de liquide, dont la paroi soit formée, d'une part, de n petits cylindres de verre

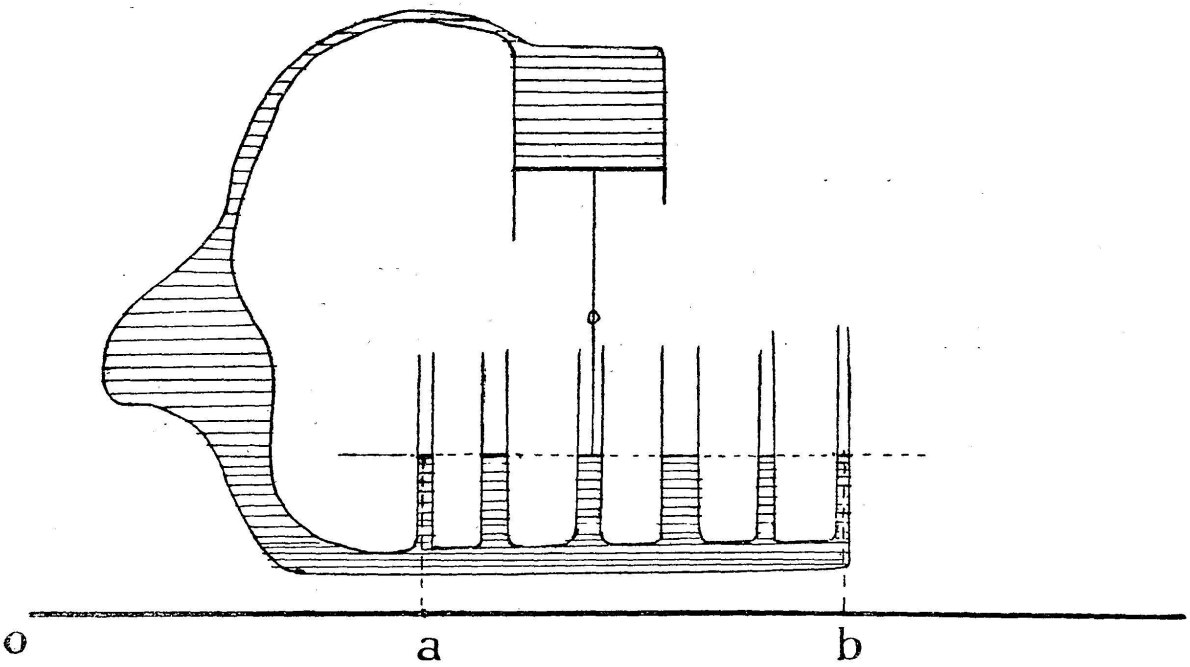

Fig. 2.

à axes verticaux, correspondants aux valeurs $j = 1$, $j = 2$, ... $j = n$, situés à la distance $\frac{b-a}{n}$ les uns des autres, et tels que la surface de la section du $j^{\text{ième}}$ soit égale à $\frac{b-a}{n} F(x_i, t_j)$, et d'autre part d'un gros cylindre dont l'axe vertical coïncide avec celui du petit cylindre pour lequel $i = j$, et dont la surface de la section soit égale à l'unité. Ce gros cylindre se projettera sur la diagonale du carré passant par O, puisque $i = j$.

Dans les n petits cylindres pourront se mouvoir à frottement doux de petits pistons étanches, et dans le gros cy-

lindre un gros piston relié par une tige verticale de longueur invariable au petit piston situé au-dessous de lui.

Cela posé, supposons que les n petits pistons soient placés initialement dans un même plan horizontal et que nous leur donnions des déplacements verticaux arbitraires que nous compterons à partir de ce plan horizontal, et que nous pouvons appeler $\varphi(t_j)$. Si nous prenons la seule précaution de vérifier que tous les pistons sont en contact avec le liquide, les déplacements $\varphi(t_j)$ satisferont à la relation

$$\sum_{j=1}^{j=n} \frac{b-a}{n} F(x_i, t_j)\, \varphi(t_j) = \varphi(x_i)$$

puisque cette relation exprime que la variation du volume occupé par le liquide est nulle. En effet, la variation de volume de chaque petit cylindre est $\varphi(t_j) \cdot \frac{b-a}{n} F(x_i, t_j) =$ déplacement $\times$ section. Quant à la variation de volume du gros cylindre, elle a lieu en sens inverse et est $-\varphi(x_i)$, puisque le déplacement de son piston est égal à celui du petit piston pour lequel $i = j$, c'est-à-dire pour lequel $x_i = t_j$).

Ceci bien établi, levons la restriction que nous avons faite et supposons $f(x_i)$ différent de zéro. Nous n'aurons pour cela qu'à déplacer le gros piston de la quantité $f(x_i)$ avant d'établir la liaison qui le réunit au petit piston placé au-dessous de lui, en maintenant fixes dans leur plan horizontal initial tous les petits pistons, et à leur donner, seulement après, leurs déplacements $\varphi(t_j)$. (Une petite difficulté se présente ici : si $f(x_i)$ est négatif, on ne pourra donner le déplacement qui tendrait à comprimer le liquide. Pour tourner la difficulté, on pourra ménager un cylindre auxiliaire qui permettra la diminution de volume momentanée et que l'on ramènera à sa position initiale dès que l'on aura permis aux petits pistons de se mouvoir en restant au contact du liquide.)

Nous sommes maintenant en mesure de résoudre le système des équations (2). Construisons en effet n cavités analogues à celle que nous venons d'étudier, et correspondant aux valeurs $i = 1, 2, \ldots n$. Disposons-les parallèlement au

plan zOt de façon que les axes des cylindres passent par les sommets des petits carrés de côté $\frac{b-a}{n}$ que nous avons construits, et que le plan horizontal initial du niveau liquide soit le plan zOx.

Astreignons enfin les déplacements $\varphi(t_j)$ à être les mêmes dans chaque file de cylindre parallèle à Ox. Pour réaliser

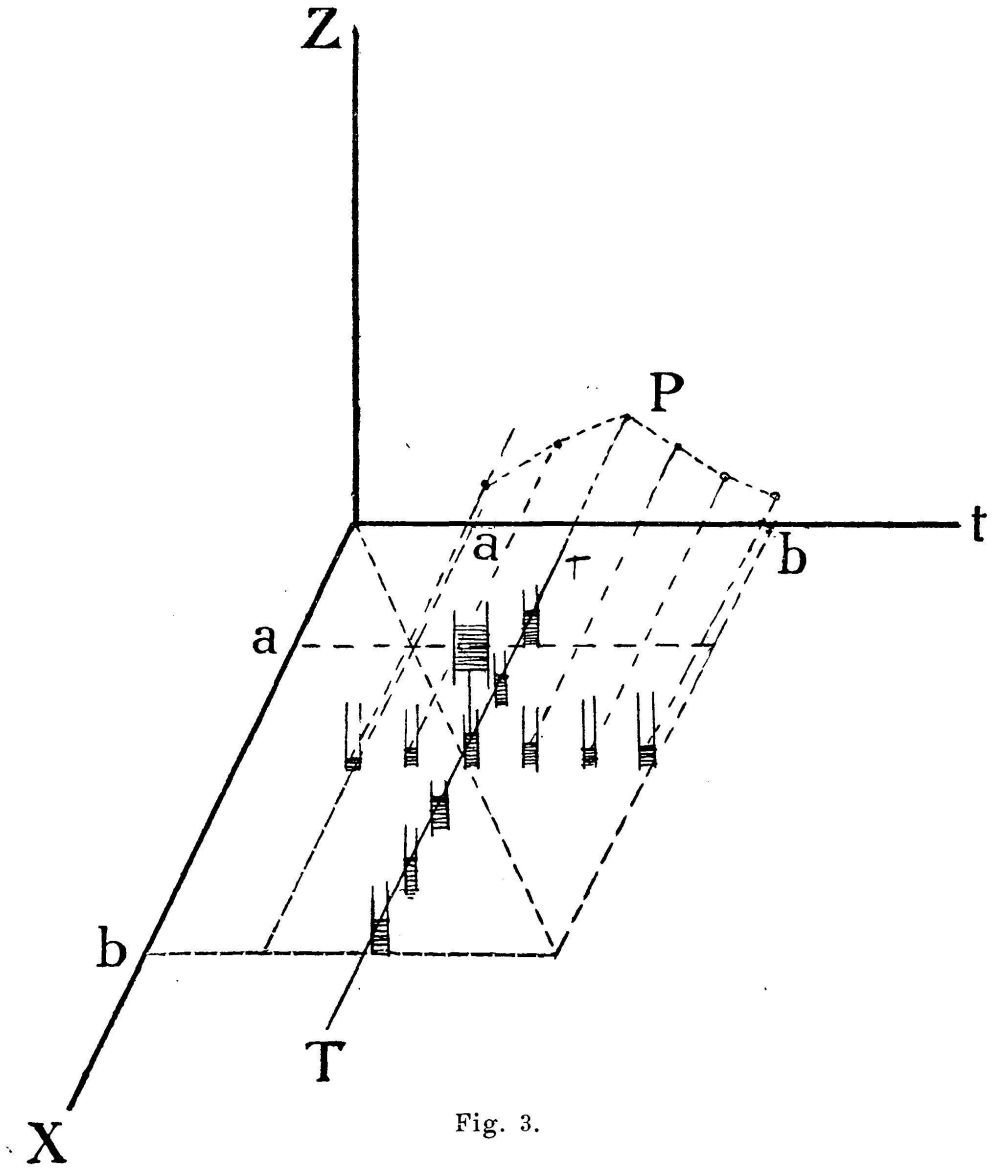

Fig. 3.

cette liaison, nous ferons passer une tige rigide T, astreinte à rester parallèle à Ox, dans des anneaux fixés à chacun des petits pistons (un dispositif mécanique facile à imaginer élimine la difficulté due à l'obstacle présenté par le verre du cylindre ; par exemple l'anneau pourra être porté par une tige parallèle à la tige du piston, voisine de celle-ci et faisant

corps avec elle, mais placée à l'extérieur du cylindre, fig. 4). Il y aura donc n tiges correspondant aux n files de cylindres parallèles à Ox. Nous enfilerons successivement ces n tiges dans les n files de cylindres parallèles à Ox, et à chaque opération nous diminuerons de n le nombre définissant le degré de liberté du système, de sorte qu'à là dernière opération, la position du système sera parfaitement déterminée.

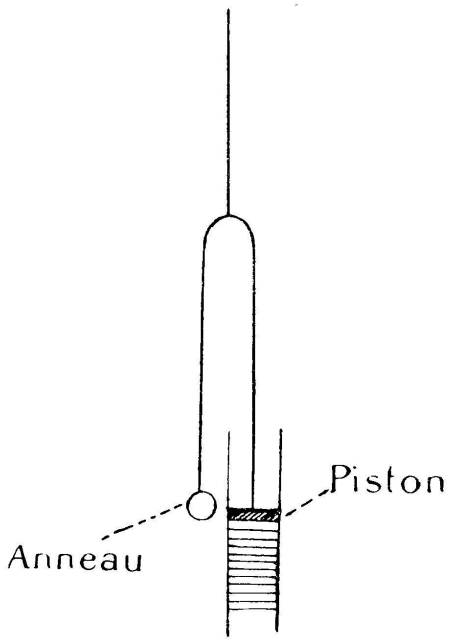

Fig. 4.

A ce moment les projections sur le plan zOt des n tiges rigides seront les sommets d'un polygone P inscrit dans la courbe cherchée $z = \varphi(t)$, polygone qui se rapprochera d'autant plus de cette courbe que le nombre n aura été choisi plus grand.

Remarque I. Lorsqu'un terme $F(x_i, t_j)$ est négatif, il faut établir la communication de la cavité et du cylindre correspondant par le haut, au lieu de la faire par le bas, comme il a été représenté dans la figure.

II. Le cas des équations homogènes est celui où $f(x)$ est nulle. Il n'aura pas en général de solution. Pour les chercher, on fera varier le volume des gros cylindres, celui des petits restant fixe, et lorsqu'on aura un mouvement possible on sera dans le cas des constantes caractéristiques.

III. L'équation de Fredholm étant linéaire en φ, se prête au calcul par approximation successive. Donc, quand l'appareil aura fourni une solution approchée, il pourra en fournir une autre plus approchée, et ainsi de suite.