I. — Une fonction des angles.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1916)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR QUELQUES FONCTIONS DES COTÉS ET DES ANGLES D'UN TRIANGLE

PAR

Michel PETROVITCH (Belgrade, Serbie).

I. — *Une fonction des angles.*

Soient a, b, c les côtés d'un triangle, α, β, γ les angles qui leur sont opposés. Envisageons la fonction des angles

$$(1) \qquad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha . \sin\beta . \cos\gamma}}{\sin\alpha + \sin\beta} .$$

En posant pour abréger

$$\sin\alpha = \xi , \qquad \sin\beta = \eta ,$$

l'identité

$$2\xi\eta = (\xi + \eta)^2 - (\xi^2 + \eta^2)$$

transforme l'expression (1) en

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{\lambda(1 + \cos\gamma) - \cos\gamma} ,$$

où

$$\lambda = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(\xi + \eta)^2} .$$

Or, l'inégalité et l'identité

$$1 \geqq \frac{\xi^2 + \eta^2}{(\xi + \eta)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi - \eta}{\xi + \eta}\right)^2$$

montrent que

$$\frac{1}{2} \leqq \lambda \leqq 1 ,$$

la limite inférieure $\frac{1}{2}$ étant atteinte pour $\xi = \eta$ et la limite supérieure 1 lorsque l'une des valeurs ξ et η est négligeable par rapport à l'autre.

On en conclut

$$\sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{2} - \cos\gamma} \leqq \varphi(\alpha, \beta, \gamma) \leqq 1 ,$$

ou encore

$$\cos\frac{\pi-\gamma}{2} \leqq \varphi(\alpha, \beta, \gamma) \leqq 1 .$$

Par suite

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1+\cos\frac{\pi-\gamma}{2}}{2} \pm \delta ,$$

avec

$$\delta \leqq \frac{1-\cos\frac{\pi-\gamma}{2}}{2} ,$$

ou bien encore

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \cos\frac{2\pi-\gamma}{4} \pm \delta , \tag{2}$$

avec

$$\delta \leqq \sin\frac{\pi-\gamma}{4} . \tag{3}$$

L'égalité (3) aura lieu : 1° pour $\xi = \eta$; 2° lorsque l'une ou l'autre des quantités ξ et η devient négligeable par rapport à l'autre. Au premier cas correspond

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \cos^2\frac{\pi-\gamma}{4} - \sin^2\frac{\pi-\gamma}{4} = \cos\frac{\pi-\gamma}{2}$$

et au second

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \cos^2\frac{\pi-\gamma}{4} + \sin^2\frac{\pi-\gamma}{4} = 1 .$$

On en conclut que

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \cos^2\frac{\pi-\gamma}{4}(1 \pm \varepsilon) \tag{4}$$

où l'erreur relative ε *ne surpasse jamais la grandeur* $\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\gamma}{4}$;

cette erreur est nulle pour le cas où $\alpha = \beta$, *et atteint son maximum* $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi - \gamma}{4}$ *lorsque l'un des deux angles* α *et* β *tend vers zéro.*

La proposition présente un intérêt particulier pour les triangles à angle γ *obtus*. Dans ce cas *en prenant pour* $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ *la valeur* $\cos^2 \frac{\pi - \gamma}{4}$ *l'erreur relative commise* ε *n'atteint jamais la valeur*

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} = 0{,}171$$

et cette erreur décroît rapidement lorsque l'angle γ *s'approche de 180°.*

Ainsi, l'on a

$$\text{(5)} \qquad \begin{array}{lll} \text{pour} & \gamma > 120^\circ & \varepsilon < 0{,}070 \\ & \gamma > 140^\circ & \varepsilon < 0{,}040 \\ & \gamma > 150^\circ & \varepsilon < 0{,}018 \\ & \gamma > 160^\circ & \varepsilon < 0{,}007 \\ & \gamma > 170^\circ & \varepsilon < 0{,}002 \\ & \gamma > 175^\circ & \varepsilon < 0{,}0003\ . \end{array}$$

Les triangles pour lesquels l'erreur relative ε est, en valeur absolue, plus petite qu'une valeur ε' donnée à l'avance, sont ceux pour lesquels l'angle γ, exprimé en parties de π, est plus grand que la différence

$$\pi - 4 \operatorname{arctg} \sqrt{\varepsilon'}\ ,$$

où, pour ε' suffisamment petit

$$\gamma < \pi - 4\sqrt{\varepsilon'}\ .$$

A l'aide de ce qui précède on peut, par exemple, calculer, avec une approximation connue à l'avance, *le troisième côté d'un triangle dont on ne connaît que la somme* $a + b$ *de deux côtés et l'angle obtus* γ *qu'ils forment entre eux.*

En effet, désignons par h la somme donnée ; des

$$a + b = h\ , \qquad \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

on tire

$$a = h\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta}, \qquad b = h\frac{\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$$

et par suite

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma} = h\varphi(\alpha, \beta, \gamma).$$

Il s'ensuit que

$$c = (a + b)\cos^2\frac{\pi - \gamma}{4}(1 \pm \varepsilon), \tag{6}$$

où l'erreur relative ε est celle commise sur la fonction φ qu'on vient d'étudier.

En prenant

$$c = (a + b)\cos^2\frac{\pi - \gamma}{4} \tag{7}$$

on commet une erreur relative qui pour les angles γ supérieurs à 140° n'atteindra pas 4 %, pour les angles supérieurs à 150° 1,8 %, pour les angles supérieurs à 160° 0,7 %, pour les angles supérieurs à 170° 0,2 %, etc.

II. — *Une fonction des côtés.*

L'identité

$$3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 = (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2$$

écrite sous la forme

$$1 \geqq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2} = \frac{1}{3} + \frac{(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2}{3(a + b + c)^2} \tag{8}$$

montre que, a, b, c étant des quantités positives, dont une ou deux peuvent être nulles, la valeur du rapport

$$\mu = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{a + b + c} \tag{9}$$

est toujours comprise entre $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et 1, la limite inférieure $\frac{1}{\sqrt{3}}$ étant atteinte pour $a = b = c$ et la limite supérieure 1 étant